

Integrales inmediatas

Son aquellas que se pueden resolver inmediatamente, suceden cuando: tenemos la derivada de una función sin tener que ajustar ni compensar con coeficientes: $\int F'(x) dx = F(x)$. $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

También podemos tener que ajustar coeficientes: $\int -3x^4 dx = -\frac{3}{5}x^5 + C$
 $\int 6e^{2x} dx = 3e^{2x} + C$

Los pasos son: $\int -3x^4 dx$ y $\int 6e^{2x} dx$

① Sacar fuera de la integral los coeficientes: $-3 \int x^4 dx$

② Ajustar con un coeficiente con el que conseguiríamos la derivada:
 $-3 \int \frac{5}{5} x^4 dx$ ⊕ Multiplicamos y dividimos por lo mismo, para no efectuar cambios.

Me faltaría un 5

$$6 \int \frac{2}{2} e^{2x} dx$$

Me faltaría un 2

③ Sacar fuera de la integral lo que no forme parte de la integral inmediata:

$$-\frac{3}{5} \int 5x^4 dx = -\frac{3}{5} x^5 + C$$

¡Inmediata!

$$\frac{6}{2} \int 2e^{2x} dx = 3e^{2x} + C$$

¡Inmediata!

Integrales Trigonométricas

Las funciones seno, coseno y tangente las resolveremos como las anteriores.

No obstante, las integrales de funciones "arco", las identificaremos de la siguiente forma:

TABLA DE DERIVADAS

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x) &= \arcsen f(x) + C \rightarrow \int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\ \int \frac{dx}{1+f^2(x)} \cdot f'(x) &= \arctg f(x) + C \rightarrow \int \frac{6x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)} dx = \\ \int \frac{dx}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} &= \operatorname{arcsec}[f(x)] + C \rightarrow \int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2-1}} \end{aligned} \right.$$

Las identificamos cuando tenemos:

1) Raíces en el denominador con

2) $\boxed{}^2 + 1$

$$\sqrt{1-\boxed{}^2}$$

$$\sqrt{\boxed{}^2-1}$$

Compensamos y ajustamos:

Derivada de $\boxed{}$ sin el cuadrado.

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx = 3 \int \frac{\frac{2}{2}}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{3}{2} \arcsen(2x) + C$$

$$\int \frac{6x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)} dx = 6 \int \frac{\frac{2x}{2}}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)} dx = \frac{6}{2} \int \frac{2x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)} dx =$$

$$= 3 \arctg(\ln(x^2+1)) + C$$

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2-1}} = \operatorname{arcsec} 2x + C$$

Integrales racionales

Tipo 1: cuando en el denominador hay un único monomio y en el denominador sumandos. Separaremos sumandos y resolveremos por separado.

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{x^3} dx = \int \frac{\overset{\text{Ln } x}{\uparrow} 1}{x} dx + \int \frac{\overset{3 \cdot x^{-2}}{\uparrow} 3}{x^2} dx + \int \frac{\overset{4 \cdot x^{-3}}{\uparrow} 4}{x^3} dx = \text{Ln}|x| - 3x^{-1} - 2x^{-2} + C$$

Tipo 2: el denominador es un polinomio de grado n y el numerador es un polinomio de grado $n-1$, y puede encajar con la derivada del denominador estaremos ante logaritmos neperianos.

$$\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x - 1} dx$$

$$\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx$$

① Hallamos la derivada del denominador:

$$3x^2 + 2 \rightarrow \text{Si } 3x^2 + 2 \cdot 2 = 6x^2 + 4 \checkmark$$

$$2x \rightarrow \text{Si } 2x \cdot \frac{3}{2} = 3x \checkmark$$

② Sacamos de la integral el coeficiente que "sobra".

$$2 \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 1} dx = 2 \cdot \text{Ln}|x^3 + 2x - 1| + C$$

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \text{Ln}|x^2 + 1|$$

Ln lo pondremos con valor absoluto

Tipo 3: cuando el numerador es de mayor grado que el denominador. Simplemente haremos la división de polinomios y lo expresaremos así:

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot c + r}{d} = \frac{\cancel{d} \cdot c}{\cancel{d}} + \frac{r}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ejemplo numérico: $\frac{49}{3} = \frac{3 \cdot 16 + 1}{3} = \frac{3 \cdot 16}{3} + \frac{1}{3} = 16 + \frac{1}{3}$

Después, resolveremos:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 1 \quad | \quad 2x + 1 \\ -3x^2 - \frac{3}{2}x \\ \hline -\frac{13}{2}x + 1 \\ \frac{13}{2}x + \frac{13}{4} \\ \hline \frac{17}{4} \end{array}$$

Vamos (-1)

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} dx =$$

$$\int \frac{(2x + 1)(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4}) + \frac{17}{4}}{(2x + 1)} dx =$$

$$\int \left(\frac{(2x + 1)(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4})}{(2x + 1)} + \frac{\frac{17}{4}}{2x + 1} \right) dx =$$

$$\int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{\frac{17}{4}}{2x + 1} \right) dx$$

y resolveremos por separado.

$$\int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{\frac{17}{4}}{2x + 1} \right) dx = \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{17}{8} \text{Ln}|2x + 1| + C$$

$$\frac{3}{2} \int x dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \quad \frac{13}{4} \int 1 dx = \frac{13}{4} x$$

$$\frac{17}{4} \int \frac{1}{2x + 1} dx = \frac{17}{4} \int \frac{\frac{2}{2}}{2x + 1} dx = \frac{17}{8} \int \frac{2}{2x + 1} dx =$$

$$\text{Ln} \square \rightarrow \square' = 2 \quad = \frac{17}{8} \text{Ln}|2x + 1|$$

Tipo 4: grado del numerador es menor que el grado del denominador y este tiene raíces simples. (reales que no se repiten).

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{N}{x-n} dx =$$

$$= A \cdot \ln|x-a| + B \cdot \ln|x-b| + \dots + N \cdot \ln|x-n| + C$$

$$\int \frac{5}{x^2+3x-4} dx$$

Notad que aquí descartamos Ln porque no podríamos tener la derivada en el num.

$$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4) \quad \text{Simple y reales.}$$

$$\frac{5}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

fracciones simples

Igualemos numeradores: $5 = (x+4) \cdot A + (x-1) \cdot B$

Damos a "x" los valores de las raíces:

• Si $x = -4 \Rightarrow 5 = 0 \cdot A + (-5) \cdot B \Rightarrow B = -1$

• Si $x = 1 \Rightarrow 5 = 5 \cdot A + 0 \cdot B \Rightarrow A = 1$

$$\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x+4} dx = \ln|x-1| - \ln|x+4| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-1}{x+4} \right| + C$$

Tipo 5: grado del numerador es menor que el grado del denominador y este tiene raíces múltiples

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{(x-a)^2} dx + \dots + \int \frac{N}{(x-a)^n} dx =$$

$$= A \cdot \ln|x-a| - \frac{B}{x-a} + \dots - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{N}{(x-a)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8} dx$$

$$x^3-6x^2+12x-8 = (x-2)^3$$

$$\frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

Igualemos numeradores: $x+2 = (x-2)^2 \cdot A + (x-2) \cdot B + C$

Damos valores a "x":

Raíz $\rightarrow$ • Si $x=2 \Rightarrow 2+2 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + C \Rightarrow C=4$

Valores cualesquiera

• Si $x=3 \Rightarrow$	$5 = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 4$	Resolvemos sistema. $A=0$ y $B=1$
• Si $x=4 \Rightarrow$	$6 = 4 \cdot A + 2 \cdot B + 4$	

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int \frac{4}{(x-2)^3} dx = \int (x-2)^{-2} dx + 4 \int (x-2)^{-3} dx =$$

$$= \frac{1}{(-1)(x-2)} + \frac{4}{(-2)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2}$$