Variables aleatorias

Variables aleatorias discretas

- Esperanza (media) de una variable aleatoria discreta: $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i(P(x_i) = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$.
- Varianza de una v.a. discreta: $Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n}(P(x_i)x_i^2 - \mu^2$
- Función de distribución: $F(X) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

Distribución de Bernouilli

Sea un experimento con dos posibles resultados, generalmente llamados éxito y fracaso para los que $P[éxito] = p$ y $P[fracaso] = 1 - p = q$. Verifica $rg(x) = \{0,1\}$.

Notación	Función de probabilidad
$X \sim Be(p), p \in [0,1]$	$P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}$
Esperanza	**Varianza**
$E[x] = p$	$Var[X] = pq$

Distribución Binomial

Consideramos n experimentos de Bernouilli independientes e idénticamente distribuidos y sea la variable aleatoria X definida como el número de éxitos en n pruebas de Bernouilli. Verifica $rg(x) = \{0,1,\dots,n\}$. Es muestreo con reemplazamiento.

$X \sim B(n,p), p \in [0,1]$	$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, k \in \{0,n\}$
$E[x] = np$	$Var[X] = npq$ σ^2

Dadas $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$ $independientes\ entonces\ X + Y \sim B(n+m,p)$

Variables aleatorias continuas

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es una función de densidad sobre $\mathbb{R}$ si verifica:

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
c) $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Características

- Esperanza de una variable aleatoria continua: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.
- Varianza de una v.a. continua: $Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2]$.

Distribución Normal

Permite describir un número muy grande de fenómenos aleatorios, como por ejemplo aquellos en los que intervienen un número elevado de factores no controlables, que actúan de manera independiente y con efectos pequeños. Función normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.

Notación	Función de densidad
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Distribución Normal (0,1)

Notación	Función de densidad
$X \sim N(0,1)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tablas

¿Cómo trabajar con tablas de distribución normal?

$P(Z \leq a)$, escribimos el número correspondiente que aparece en la tabla.

$P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a)$

$P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a)$

$P(Z \geq -a) = P(Z \leq a)$

$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$

Es posible que haya casos como el tres dentro de los subcasos $P(Z \leq b)$ y $P(Z \leq a)$

Tipificación

Sea X una variable aleatoria continua cuya probabilidad se distribuye como una distribución N(μ, σ) entonces la variable aleatoria $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ se distribuye como una N(0,1).

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Aproximación de la binomial por la normal

Sea X una variable aleatoria **discreta** cuya distribución de probabilidad es una B(n,p) y que verifica que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces la distribución de la variable X se puede aproximar mediante una distribución normal $N(np, \sqrt{npq})$.

$X \sim B(n,p)$ con $np \geq 5 \quad nq \geq 5 \to X \approx N(np, \sqrt{npq})$.

1. $P(X = a) = P(a - 0{,}5 < X' < a + 0{,}5)$
2. $P(X < a) = P(X' < a - 0{,}5)$
3. $P(X \leq a) = P(X' < a + 0{,}5)$
4. $P(X > a) = P(X' > a + 0{,}5)$
5. $P(X \geq a) = P(X' > a - 0{,}5)$

La profe de mate MOLA