37. Tema 37: La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas.

Índice

Oposiciones de Secundaria (Matemáticas)

37. Tema 37: La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas.

37.1. Introducción

LEGISLACIÓN

Actualmente, el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato viene determinado por el siguiente marco legislativo estatal y autonómico:

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.
- Decreto 48/2015 de 14 de mayo del Consejo de Gobierno.
- Decreto 52/2015, de 21 de mayo, del Consejo de Gobierno.

CURRÍCULO

La Geometría tiene una gran influencia en el desarrollo del alumno, sobre todo en las capacidades relacionadas con la comunicación y la relación con el entorno. Es una materia especialmente importante en estas edades en las que el alumno, aunque sea de Secundaria, necesita seguir verificando mediante la manipulación de objetos reales, pues esto influye en el desarrollo posterior de las capacidades matemáticas necesarias como la abstracción. La capacidad espacial de los alumnos es muchas veces superior a su destreza numérica e impulsar y mejorar esta capacidad junto con el dominio de los conceptos geométricos y el lenguaje les posibilita para aprender mejor las ideas numéricas, las de medición e incluso otros temas más avanzados.

El alumnado comienza en el **primer ciclo de la ESO** (1º, 2º y 3º) con conceptos previos que provienen de la Educación Primaria y en este ciclo, se introduce desde el Teorema de Pitágoras y Teorema de Tales (1º y 2º ESO) hasta conceptos relacionados con la semejanza en **3º ESO**. Es en **4ºESO** de Matemáticas Académicas cuando se introducen conceptos y problemas vinculados al Teorema del cateto o de la altura, que se desarrollarán más profundamente en **Bachillerato**.

Como podemos ver, conforme aumenta el nivel del alumnado, y los cursos, se profundiza en conceptos como semejanza, transformaciones en el plano, relaciones entre medidas, idea de límite y de infinito, así como de máximos y mínimos de funciones, conceptos con los que tiene íntima relación la geometría del triángulo y cuya geometría podremos emplear para explicar a nuestros alumnos máximos y mínimos de funciones sin recurrir a las derivadas.

O.D.

En los contenidos actuales de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría se pretende establecer una serie de destrezas cognitivas de carácter general que puedan ser utilizadas en muchos casos particulares y que contribuyen por sí mismas a desarrollar las capacidades del conocimiento de los alumnos. Estos contenidos se caracterizan por tener una visión práctica del aprendizaje, valorando y aplicando los alumnos sus conocimientos dentro y fuera del aula. Se pasa de inventar problemas y de suponer datos sobre la pizarra a resolver ejemplos reales que desarrollen la creatividad, el ingenio y la iniciativa de los alumnos promoviendo unos contenidos intuitivos que sienten las bases para su análisis.

Es por esto que el empleo de aprendizaje basado en necesidades reales y experiencias reales, así como el empleo de herramientas y recursos digitales, favorece enormemente la enseñanza y el proceso de aprendizaje en nuestros alumnos, pudiendo, así, hacer empleo de aplicaciones como **Geogebra** o el **Proyecto Gauss** de la Comunidad de Madrid.

HISTORIA

El triángulo es una figura que se ha usado desde hace muchísimos años para simbolizar determinadas cosas. En la Cueva de los Candiles, en Las Palmas de Gran Canaria (3000 a.C., aprox.), hay dibujos de triángulos que, según los expertos, son un homenaje a la fertilidad de la mujer. Todavía hoy, en los movimientos feministas se utiliza esta forma triangular, hecha con los dedos de las manos, para representar triángulos púbicos.

En la Antigüedad se hablaba del triángulo perfecto, también llamado triángulo sagrado entre los egipcios, cuyos lados medían 3, 4 y 5 unidades. Se usaban principalmente para trazar ángulos rectos, pero también tenía otros usos. Los arquitectos de las dinastías Aqueménides y Sasánidas se servían de ellos para trazar los tejados de sus edificios. En épocas posteriores sigue apareciendo el triángulo como elemento importante en las construcciones arquitectónicas.

A continuación, desarrollaremos el tema siguiendo el índice anteriormente expuesto.

37.2. Teorema de Thales

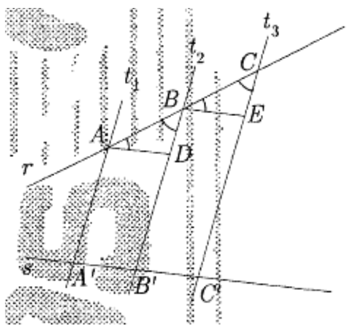
El Teorema de Thales es la base que sustenta al concepto de semejanza y permite definir las razones trigonométricas de un ángulo. En la demostración del citado teorema se usará la propiedad siguiente, que no es más que un caso particular de aquél.

Propiedad: Sean r y s dos rectas del plano y sean t_1, t_2 y t_3 tres rectas paralelas. Sean A, B y C los puntos de intersección de r con t_1, t_2 y t_3 respectivamente, y A', B' y C' los puntos de intersección de s con t_1, t_2 y t_3 respectivamente. Entonces si AB=BC, también es A'B'=B'C'.

Demostración:

Trazamos por A y B paralelas a s, que cortan a t_2 y t_3 en D y E, respectivamente. En los triángulos ABD y BCE se dan las siguientes igualdades:

i. Los ángulos $\angle DAB$ y $\angle DBA$ del primero son respectivamente iguales a los ángulos $\angle EBC$ y $\angle ECB$ del segundo por tener sus lados paralelos.
ii. AB=BC, por hipótesis.



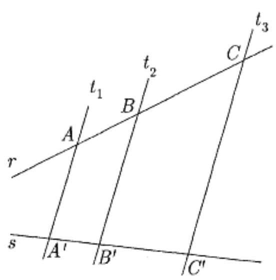
Por tanto, los triángulos ABD y BCE son iguales y de ahí que AD=BE. Por último, al ser AD y A'B' lados opuestos de un paralelogramo, es AD=A'B' y, por idéntica razón, BE=B'C', de donde se concluye que AB=A'B'.

Consecuencia: división de un segmento en n partes iguales

1. Se construye una semirrecta con origen en uno de los extremos del segmento a dividir.
2. Sobre dicha semirrecta se trazan n segmentos iguales.
3. Se une el extremo del último segmento construido con el extremo del segmento a dividir.
4. Por los puntos de separación de los segmentos de la semirrecta auxiliar se trazan paralelas a la recta de 3.

Por la propiedad anterior, al ser iguales los segmentos construidos sobre la recta auxiliar, también lo son los segmentos sobre la recta original.

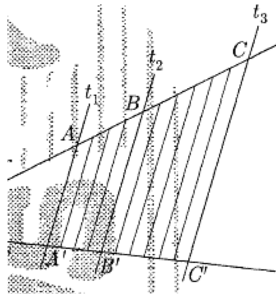
El Teorema de Thales establece que tres rectas paralelas que cortan a dos rectas determinan sobre éstas segmentos de longitudes proporcionales. Concretamente:



37.2.1. Teorema de Thales

Sean r y s dos rectas del plano y sean t_1, t_2 y t_3 rectas paralelas que cortan a r y s en los puntos A, B, C y A', B' y C' , respectivamente. Entonces: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$

Demostración:



Lo que debe ser probado puede escribirse como $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Supongamos primero que $\frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y lamemos x al cociente común $\frac{AB}{m} = \frac{BC}{n} = x$. Al dividir los segmentos AB y BC en segmentos de longitud x, se obtienen m segmentos en AB y n segmentos en BC. Por la propiedad anterior, los segmentos resultantes en s tienen todos longitud común, que llamaremos y. Entonces A'B'=my, B'C'=ny y: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n} = \frac{AB}{BC}$.

Supongamos ahora que $\frac{AB}{BC}$ es un número real cualquiera y que $\frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C'}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe algún q∈$\mathbb{Q}$ tal que $\frac{AB}{BC} < q < \frac{A'B'}{B'C'}$. Llamaremos entonces D al punto de r tal que DB=q·BC. Por ser $\frac{AB}{BC} < q$, ocurre que DB=q·BC>AB, luego D se encuentra fuera del segmento AB. Trazando entonces por D una paralela t1, se obtendrá un punto D' fuera del segmento A'B' y entonces será: $\frac{D'B'}{B'C'} = \frac{DB}{BC} = q \Longrightarrow \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{D'B'}{B'C'} = q$ lo cual es absurdo, puesto que elegimos $q < \frac{A'B'}{B'C'}$. Por tanto, es $\frac{AB}{BC} \geq \frac{A'B'}{B'C'}$. La demostración de que $\frac{AB}{BC} \leq \frac{A'B'}{B'C'}$ es análoga.

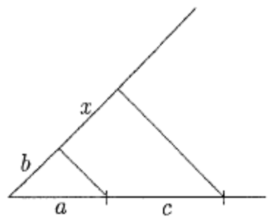
37.2.2. Construcciones geométricas

El teorema de Thales facilita ciertas construcciones geométricas.

Cuarto proporcional de tres segmentos

Dados los segmentos de longitudes a, b y c, se desea hallar un segmento de longitud x tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. A dicho segmento se le llama cuarto proporcional de a, b y c.

Para construirlo se razona como sigue:



1. Trazamos dos semirrectas con origen común.
2. En una de ellas marcamos segmentos de longitudes a y c
3. En la otra marcamos un segmento de longitud b.
4. Unimos el extremo de este segmento con el extremo de a.
5. Por el extremo del segmento c trazamos una paralela al segmento anterior.

Según el teorema de Thales, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

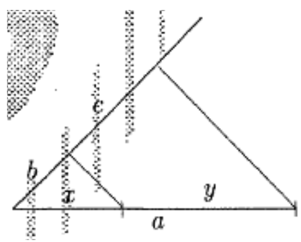
Tercero proporcional de dos segmentos

Dados los segmentos de longitudes a y b, se llama tercero proporcional de a y b al segmento de longitud tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

El tercero proporcional de a y b coincide conel cuarto proporcional de a, y y b y su construcción se reduce a la de éste.

Descomposición de un segmento en partes proporcionales a dos segmentos dados

El problema consiste en, dados tres segmentos a, b y c, descomponer el segmento a en dos segmentos x e y tales que $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$. Puede actuarse así:



1. Trazamos dos semirrectas con origen común.
2. En una de ellas construimos un segmento de longitud a y en la otra dos segmentos de longitudes b y c.
3. Se une el extremo del segmento a con el extremo de c.
4. Por el punto de unión de b y c, se traza una paralela a la recta anterior.

Por el teorema de Thales, $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

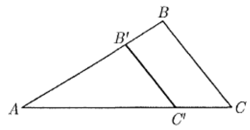
37.3. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos ABC y A'B'C' se dice que son semejantes si las longitudes de sus lados son proporcionales, esto es, si ocurre que: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Al cociente común anterior se le denomina **razón de semejanza** del triángulo ABC al triángulo A'B'C'.

37.3.1. Triángulos en posición de Thales

Sea ABC un triángulo y sean B' y C' dos puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que B'C' es paralelo a BC. Se dice entonces que los triángulos ABC y AB'C' están en posición de Thales.

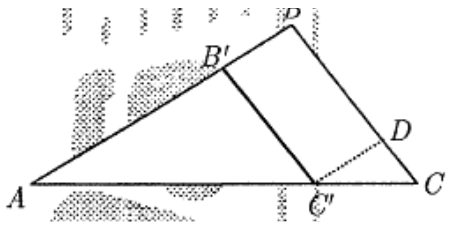


37.3.2. Teorema fundamental de semejanza

Dos triángulos en posición de Thales son siempre semejantes.

Demostración:

Como los dos triángulos tienen sus lados paralelos dos a dos, los ángulos de ambos son iguales dos a dos. Trazando una paralela a BC y B'C' por el punto A, el teorema de Thales da $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$, luego $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.



Trazamos ahora una paralela al lado AB por C' y sea D el punto de intersección de dicha paralela con BC. De nuevo, por el teorema de Tahles, $\frac{BD}{BC} = \frac{AC'}{AC}$, pero como BB'C'D es un paralelogramo, BD=B'C', luego $\frac{BC'}{BC} = \frac{AC'}{AC}$ y entonces, $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC}$.

A continuación, se expone una propiedad, recíproca a la anterior, que proporciona un método para comprobar si dos rectas son paralelas.

Consecuencias:

Sea ABC un triángulo y sean B' y C' puntos respectivos de los lados AB y AC tales que $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. En tal caso, las rectas BC y B'C' son paralelas.

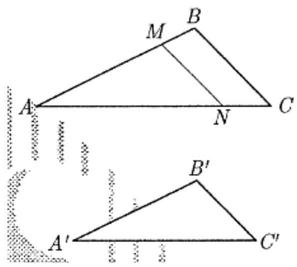
Demostración:

Trazamos por B' una paralela a BC, que cortará a la recta AC en un punto E. Entonces los triángulos ABC y AB'E están en posición de Thales, luego son semejantes y $\frac{AE}{AC} = \frac{AB'}{AB}$. Por hipótesis, $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$, luego $\frac{AE}{AC} = \frac{AC'}{AC}$ y, por tanto AE = AC', de donde se concluye que E = C'. La recta B'C' coincide entonces con la recta B'E, que es paralela a BC.

37.3.3. Criterios de semejanza de triángulos

i. Dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.
ii. Dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen un ángulo 'igual y los lados que lo forman son proporcionales.

Demostración: Probaremos solamente el primer criterio, dado que el modo de proceder en el otro es similar. Sean ABC y A'B'C' los triángulos, donde $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$. Buscamos sobre AB un punto M tal que AM=A'B' y por dicho punto trazamos una paralela al lado BC, que cortará a AC en un punto N. Los triángulos AMN y ABC están en posición de Thales, luego son semejantes. Basta entonces comprobar que los triángulos AMN y A'B'C' son el mismo, lo cual es inmediato pues: $\hat{A} = \hat{A}'$ por hipótesis; $\hat{B}' = \widehat{M}$, puesto que $\hat{B} = \hat{B}'$ por hipótesis, y $\hat{B} = \widehat{M}$ por ser ángulos de lados paralelos; y AM=A'B' por construcción de M.



Se deduce inmediatamente del primer criterio el siguiente para triángulos rectángulos:

Consecuencia: Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual un ángulo agudo.

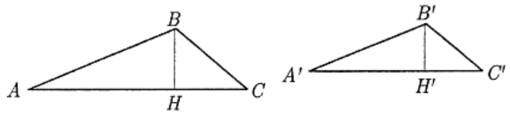
37.4. Consecuencias de la semejanza de triángulos

37.4.1. Relación entre las áreas de triángulos semejantes

Si k es la razón de semejanza entre dos triángulos semejantes, la razón entre sus áreas es k^2.

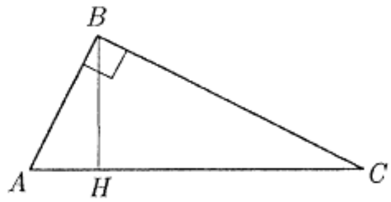
Demostración: Sean ABC y A'B'C' dos triángulos semejantes de áreas S y S', respectivamente, y sea k la razón de semejanza del 1° al 2°. Por la semejanza entre ambos triángulos es $\hat{A} = \hat{A}'$, y de aquí se deduce que los triángulos rectángulos ABH y A'B'H' son también semejantes, luego $\frac{B'H'}{BH} = \frac{A'B'}{AB} = k$:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2}A'C' \cdot B'H'}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = \frac{A'C' \cdot B'H'}{AC \cdot BH} = k \cdot k = k^2$$



37.4.2. Teorema del cateto

Sea ABC un triángulo rectángulo en B y sea H la proyección de B sobre AC. Entonces, $AB^2 = AC \cdot AH$.



Demostración:

Los triángulos ABC y AHB son rectángulos con un ángulo agudo igual, luego son semejantes. De ahí que $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, luego $AB^2 = AC \cdot AH$.

37.4.3. Teorema de Pitágoras

Como consecuencia, el teorema de Pitágoras: Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Entonces: $AC^2=AB^2+BC^2$.

Demostración:

Si H es la proyecciónde B sobre AC, aplicando el teorema del cateto a los dos catetos AB y BC resulta que $AB^2 = AC \cdot AH$ y $BC^2 = AC \cdot CH$. Al sumar ambas igualdades, se tiene:

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AH + AC \cdot CH = AC \cdot (AH+CH) = AC \cdot AC = AC^2$$

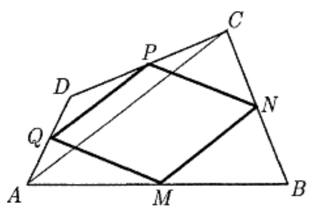
37.4.4. Teorema de la altura

Sea ABC un triángulo rectángulo en B y sea H la proyección de B sobre AC. Entonces: $BH^2 = AH \cdot CH$.

Demostración:

Los triángulos ABH y BCH son semejantes por ser ambos semejantes al triángulo ABC. Entonces $\frac{BH}{AH} \Longrightarrow \frac{CH}{BH}$, luego $BH^2 = AH \cdot CH$.

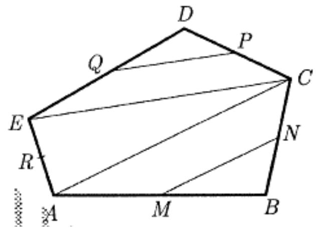
Proposición: Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo son vértices de un paralelogramo.



Demostración:

Sean M, N, P y Q los puntos medios respectivos de los lados consecutivos AB, BC, CD y DA de un cuadrilátero convexo. Debe probarse que NP y MQ son paralelos y que también lo son MN y QP.

Para ello repárese en que los triángulos DQP y DA C son semejantes puesto que comparten el ángulo $\widehat{D}$ y tienen proporcionales los lados que lo forman, esto es, $\frac{DQ}{DA} = \frac{DP}{DC} = \frac{1}{2}$.Entonces, los segmentos QP y AC son paralelos. Por idéntica razón también son paralelos MN y AC, por lo que QP y MN son paralelos. Intercambiando los papeles de los vértices, se prueba que NP y MQ son paralelos, lo que termina la demostración.



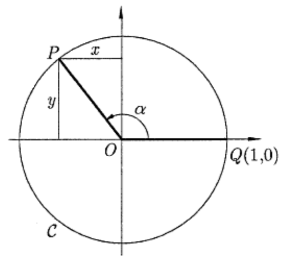
Proposición: Un polígono convexo con un número impar de vértices queda completamente determinado por los puntos medios de sus lados.

Demostración:

Para no complicar en exceso la escritura de la demostración, haremos la prueba para el caso particular de un pentágono. La generalización al caso de un polígono con un número impar de lados no supone dificultad adicional alguna. Sean M, N, P, Q y R los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DE y EA del pentágono.

Por lo ya dicho anteriormente, los triángulos ABC y MBN son semejantes pues comparten el ángulo B y $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$. Así, también $\frac{NM}{CA} = \frac{1}{2}$ y los segmentos CA y NM son paralelos, luego $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. Un razonamiento análogo prueba que $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$. Así, $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{NM}$ y entonces $A = R + \overrightarrow{RA} = R + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{NM}$ luego A queda determinado por los puntos medios de los lados. Para terminar, basta observar que B es el simétrico de A respecto de M; C es el simétrico de B respecto de N; D es el simétrico de C respecto de P; y E es el simétrico de A respecto de R.

37.5. Razones trigonométricas



Se definen aquí las razones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0 y 2π radianes para extenderlas a toda la recta por periodicidad.

Sea α∈[0,2π) el ángulo que forman dos semirrectas r y s y sea O = r ∩ s el vértice de dicho ángulo. Respecto de una referencia rectangular del plano centrada en O y cuyo eje de abscisas contiene a r, sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro O y radio 1, sea Q el punto de coordenadas (1, 0) Y sea P = (x, y) el punto de intersección de la semirrecta s con la circunferencia $\mathcal{C}$.

Las razones trigonométricas de a se definen entonces como sigue:

- Coseno de α: Se escribe cosα y es la abscisa de P, es decir, cosα = x.
- Seno de α: Se escribe senα y es la ordenada de P, esto es, senα = y.
- Tangente de α: Se escribe tgα y es el cociente entre la ordenada y la abscisa de P, es decir, $tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$, siempre que x ≠ 0, es decir, siempre que $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- Secante de α: Se escribe secα y es el inverso de la abscisa de P, o sea, $sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{cos\alpha}$, siempre que es x ≠ 0, es decir, siempre que $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- Cosecante de α: Escrita cosecα, es el inverso de la ordenada de P, es decir, $cosec\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen\alpha}$, siempre que es y ≠ 0, es decir, siempre que $\alpha \notin \{0, \pi\}$.
- Cotangente de α: Se escribe cotgα y es el cociente entre la abcisa y la ordenada de P, es decir, $cotg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{tg\alpha}$, siempre que es y ≠ 0, es decir, siempre que $\alpha \notin \{0, \pi\}$.

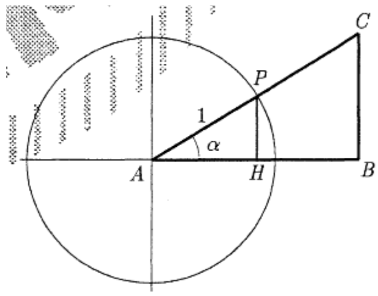
37.5.1. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Si α es uno de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sus razones trigonométricas pueden obtenerse como:

$cos\alpha = \dfrac{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$sens\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$tg\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}$

Demostración: Sea ABC un triángulo rectángulo en B y sea $\alpha = \angle BAC$. Considérese la circunferencia de centro A y radio 1 para obtener en ella las razones de α. Si P es el punto de corte de la circunferencia con AC y H es la proyección de P sobre AB, ocurre, por la semejanza de los triángulos rectángulos AHP y ABC, que:

$$cos\alpha = AH = \frac{AH}{1} = \frac{AH}{AP} = \frac{AB}{AC} \qquad sen\alpha = HP = \frac{HP}{1} = \frac{HP}{AP} = \frac{BC}{AC} \qquad tg\alpha = \frac{HP}{AH} = \frac{BC}{AB}$$



37.5.2. Extensión de las razones trigonométricas a cualquier ángulo α real

El seno y el coseno han sido definidos en el intervalo [0,2π). Si ahora α∈ℝ es cualquiera, existe un único número entero k tal que α - 2kπ ∈ [0,2π) y se definen entonces el coseno y el seno de α mediante:

$$cos\alpha = cos(\alpha - 2k\pi) \qquad\qquad sen\alpha = sen(\alpha - 2k\pi)$$

Se definen de este modo las funciones seno y coseno en toda la recta real ℝ y ambas son periódicas de período 2π. A partir de estas dos funciones se definen las restantes funciones trigonométricas.

37.5.3. Propiedades de las razones trigonométricas

Para cada α∈ℝ ocurre que:

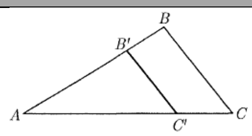
$\lvert cos\alpha\rvert \leq 1, \lvert sen\alpha\rvert \leq 1$	$\lvert sen\alpha\rvert \leq \lvert\alpha\rvert$	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha, \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k∈ℤ

Demostración: La propiedad 1 es inmediata por la definición de seno y coseno. Teniendo en cuenta esta propiedad, la 2 es evidente siempre que $|\alpha| \geq 1$. Si es $0 \leq \alpha < 1$, entonces es $sen\alpha \geq 0$ y de la figura se deduca que $sen\alpha = PH \leq PQ < \widehat{PQ} = \alpha$. Si -1≤ $\alpha < 0$, entonces es $sen\alpha < 0$ y, por simetría del caso anterior, se sigue que $-sen\alpha \leq -\alpha$. En ambos casos es $|sen\alpha| \leq |\alpha|$.

La propiedad 3 es la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OHP cuyos catetos son $OH = |cos\alpha|\ y\ PH = |sen\alpha|$ y cuya hipotenusa es OP=1. La propiedad 4 se obtiene dividiendo la igualdad de 4 por $cos^2\alpha$, que no es nulo siempre que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo k∈ℤ.

37.6. Resumen

A continuación, se exponen algunos de los conceptos destacados más importantes que se han desarrollado en el tema:

Teorema de Thales	$\boldsymbol{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}}$
Construcciones geométricas	Cuarto proporcional de tres segmentos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ Tercero proporcional de dos segmentos : $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ Descomposición de un segmento en partes proporcionales a dos: $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$
Triángulos semejantes. Criterios de semejanza	$\boldsymbol{\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}}$
Triángulos en posición de Thales	
Teorema fundamental de semejanza	Dos triángulos en posición de Thales son siempre semejantes.
Consecuencias de la semejanza de triángulos	$\boldsymbol{\frac{S'}{S} = k^2}$

Teorema del cateto	$AB^2 = AC \cdot AH$
Teorema de Pitágoras	$AC^2=AB^2+BC^2$
Teorema de la altura	$BH^2 = AH \cdot CH$

Razones trigonométricas

$\cos\alpha = x$	$sen\alpha = y$	$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$	$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$	$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$	$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

$cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$sens\alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$	$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}$

Propiedades

$\lvert cos\alpha \rvert \leq 1, \lvert sen\alpha \rvert \leq 1$	$\lvert sen\alpha \rvert \leq \lvert \alpha \rvert$	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$

37.7. Conclusión

DESARROLLO TEMA

Para el desarrollo del presente tema, se ha priorizado la demostración y exposición exhaustiva de los conceptos básicos, así como de sus orígenes, hasta la presentación de teoremas más complejos como el del cateto, Pitágoras o el teorema de la altura.

Debido a la longitud del tema, se ha prescindido de la demostración de algunas fórmulas y se han omitido demostraciones análogas a las que ya se presentaban.

APLICACIONES

A nuestro alrededor aparecen multitud de triángulos, basta con observar con algún detenimiento los objetos que nos rodean. El triángulo está presente en nuestra vida cotidiana, y, por ese motivo, conviene conocer los teoremas que son intrínsecos a su comprensión, como es el Teorema de Thales o la trigonometría; ya que está presente tanto en estructuras de los techos de las casas, puentes, etc., como en los ganchos para colgar la rop, etc. El triángulo es muy utilizado en las estructuras porque es la única figura que no se deforma.

Además, esta figura geométrica y los teoremas que la rodean son de gran utilidad para campos como la física, la astronomía, o el diseño aeroespacial.

37.8. Bibliografía

BURGOS: Curso de álgebra y geometría. Ed. Pearson Educación, S.A.

BURGOS: Álgebra y trigonometría. Ed. Bruño.

SÁNCHEZ MARMOL: Geometría. Ed. S.A.E.T.A.

VV.AA.: Geometría, curso superior. Ed. Bruño.

TEMARIO DEIMOS

TEMARIO GAMBOA

TEMARIO MATEMÁTICAS DIVERTIDAS

TEMARIO CLAUSTRO