1. Tema 1: Números naturales. Sistemas de numeración.

Índice

Oposiciones de Secundaria (Matemáticas)

1. Tema 1: Números naturales. Sistemas de numeración.

1.1. Introducción

LEGISLACIÓN

Actualmente, el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato viene determinado por el siguiente marco legislativo estatal y autonómico:

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.
- Decreto 48/2015 de 14 de mayo del Consejo de Gobierno.
- Decreto 52/2015, de 21 de mayo, del Consejo de Gobierno.

CURRÍCULO

Los principales conceptos y procedimientos que conforman el tema escolar de los números naturales y de las relaciones entre ellos en secundaria, se resume en un esquema en el que destacan cuatro agrupamientos a partir de las directrices curriculares generales. Estos cuatro agrupamientos ayudan a identificar cuatro prioridades en el aprendizaje de los números naturales para los primeros cursos de Educación secundaria. Dichas prioridades son:

1. Profundizar en el estudio de relaciones numéricas, que tiene que ver con la noción de orden, con el estudio de secuencias numéricas, y con relacionar e inventar diferentes modos de representar números naturales.
2. Dominar el Sistema Decimal de Numeración, que se concreta en dominar el valor posicional de las cifras, los órdenes de los números, y las normas de escritura y lectura de números.
3. Trabajar con las operaciones y propiedades de los números naturales, tanto en la dimensión aditiva como en la multiplicativa, manejar los procesos de estimación y cálculo mental.
4. Interpretar y resolver situaciones y problemas con los números naturales, incluyendo problemas aditivos y multiplicativos.

O.D.

Las competencias expresan finalidades educativas a largo plazo, que han de desarrollarse paulatinamente a lo largo de varios cursos y etapas, y mediante el trabajo en diferentes temas de matemáticas. En ambos casos, las actuaciones de los escolares ante determinadas tareas permiten observar el grado de consecución de esas expectativas. Pero, mientras en el caso de los objetivos específicos esas tareas están vinculadas a un contenido matemático concreto, en el caso de las competencias las tareas han de ser abiertas, abarcar conocimientos de distintos temas y referirse a diferentes situaciones y contextos.

HISTORIA

La mente humana asume sin esfuerzo la idea del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como una cadena ordenada 1, 2, 3, 4, con un primer elemento (1) y en la que a cada número le sigue otro. Si se pretende, en cambio, dar una definición consistente del conjunto de los números naturales, debe acudirse, bien a la Teoría de Conjuntos, refiriendo los números naturales a otros conceptos previos, bien a los axiomas de Peano, caracterizando a estos números mediante determinadas propiedades.

El recurso a la Teoría de Conjuntos consiste en entender cada número natural como un objeto asociado a un conjunto finito no vacío, de forma que a dos de estos conjuntos se les asocia el mismo número natural si y sólo si son equipotentes (recuérdese que un conjunto no vacío es finito si no es equipotente a ningún subconjunto propio suyo). Con esta interpretación, las construcciones en los números naturales, se realizan a partir de nociones de la Teoría de Conjuntos.

Por su parte, los axiomas de Peano definen a $\mathbb{N}$ como cualquier conjunto totalmente ordenado y no vacío que cumpla determinadas propiedades. Será éste el camino que seguiremos y, para recorrerlo, recuérdese que una relación binaria $\leq$ en un conjunto de X es de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva y que, si lo es, es de orden total si, dados $x, y \in X$, se da una y sólo una de las posibilidades $x<y$, $x=y$ o $y<x$.

Cabe mencionar que, dado que bajo opinión personal reporta más ventajas que inconvenientes no considerar como número natural al 0, así es que el primer número natural será el 1.

A continuación, desarrollaremos el tema siguiendo el índice anteriormente expuesto.

1.2. Los números naturales ℕ

El conjunto de los números naturales, N, puede:

a) Construirse como clases de equivalencia obtenidas por la relación de coordinabilidad entre conjuntos. Se dice que dos conjuntos A y B son coordinables y se escribe A~B, si hay tantos elementos en uno como en el otro.
   I. Propiedad reflexiva: Todo conjunto es coordinable consigo mismo.
   II. Propiedad simétrica: Si A~B, entonces B~A.
   III. Propiedad transitiva: Si A~B y B~C, entonces A~C.
   IV. Dos ordenaciones diferentes de un mismo conjunto finito, son coordinables entre sí.

b) Definirse mediante los axiomas de Peano (1889).

La vía que seguiremos para introducir y posteriormente estudiar las propiedades de los números naturales, es la segunda, los axiomas de Peano.

1.2.1. El conjunto ℕ de los números naturales

Se llama conjunto ℕ de los números naturales a cualquier conjunto en el que se ha definido una relación de orden total ≤ que cumple los siguientes axiomas:

i. Existe un número natural que es menor que todos los demás, es decir, existe un elemento 1∈ℕ tal que 1≤n, para todo n ∈ ℕ. A 1 se le llama el elemento mínimo (o primer elemento) de ℕ.
ii. Para cada número natural n existe otro número natural n' tal que n < n' y tal que si algún m ∈ ℕ cumple que n≤m≤n', entonces m = n o m = n'. Se dice que n' es el siguiente de n en el orden considerado y el axioma afirma que cada número natural tiene su siguiente.
iii. **Principio de inducción matemática**: Todo subconjunto de ℕ que contenga al elemento 1 y al siguiente de cada uno de sus elementos es el propio conjunto ℕ, esto es, si un subconjunto S de ℕ contiene al elemento mínimo 1 y es tal que si n ∈ S entonces n' ∈ S, dicho subconjunto es S = ℕ.

La anterior definición axiomática tiene perfecto sentido pues acudiendo a la Teoría de Conjuntos puede comprobarse que existen conjuntos N de números naturales (cumpliendo los tres axiomas anteriores) y que todos ellos son isomorfos para el orden.

1.2.2. Propiedades de los números naturales

Si N es el conjunto de los números naturales, se cumple que:

1. El elemento mínimo 1 de ℕ es único.
2. El siguiente de cada número natural es único: $\forall a, b, a', b' \in N$ si $a \neq b \Rightarrow a' \neq b'$

   La demostración es inmediata, puesto que si $a \neq b$, y admitimos $a' = b'$, por axioma ii, obtendríamos $a = b$, que es una contradicción.
3. Cada número natural, salvo el mínimo, es el siguiente de un único número natural: $\forall a, a' \in N \;\Rightarrow a \neq a'$

   Realizamos la demostración por inducción: $K = \{a / a \in N \text{ y } a \neq a'\}$. Vemos que $K \subseteq N$ y $1 \in K$, por el axioma i. Suponiendo que $a \in K$: $a \neq a' \Rightarrow \text{teorema } 1 \Rightarrow (a') \neq (a')' \Rightarrow \text{definición de K} \Rightarrow \text{K} \equiv \text{N}$.
4. ℕ es infinito.

1.3. La adición y multiplicación en los números naturales

1.3.1. Adición en ℕ

Teorema: Existe una única aplicación f: ℕ x ℕ → ℕ que para cualesquiera x, y ∈ ℕ cumple:

i. f(x, y') = f(x, y)´   ii. f(x, 1) = f(x)'

La operación anterior se denomina adición o suma en ℕ, y en adelante se denotará por "+".

Considérese el conjunto: $A=\{x\in N:\exists f_x:N\to N \text{ que cumple } f_x(1)=x' \text{ y } f_x(y')=[f_x(y)]'\ \forall y\in \mathrm{N}\}$

Si x∈A, entonces existe $f_x:N\to N$ con las condiciones exigidas. Definamos: $f_x:N\to N:y\to f_{x'}(\mathrm{y})=[f_x(\mathrm{y})]'$. Se infiere, entonces, que x'∈A y por el axioma de inducción A= ℕ, ya que:

$$f_{x'}(y')=[f_x(y')]'=[f_x(y)']'=[f_{x'}(y)]' \qquad\qquad f_{x'}(1)=[f_x(1)]'=x''$$

Por lo tanto, la aplicación $f_x:N\times N\to N:(\mathrm{x},y)\to f(x,y)=f_x(\mathrm{y})$ cumple i y ii.

Para probar la unicidad, supongamos que existen dos aplicaciones f, g: ℕ x ℕ → ℕ que satisfacen las condiciones. Consideramos ∀x∈ℕ, el conjunto: $M_x=\{y\in N: f(x,y)=g(x,y)\}$.

Si $y\in M_x$, entonces f(x, y)=g(x, y), luego: $f(x,y`)=[f(x,y)]'=[\mathrm{g}(x,y)]'=g(x,y`)$, luego $y'\in M_x$ y, por el axioma de inducción, para cada número natural x los conjuntos M_x y ℕ coinciden. Así, f y g coinciden.

1.3.2. Propiedades de la suma de números naturales

La suma recién definida en ℕ tiene las siguientes propiedades para cualesquiera x, y, z ∈ ℕ.

a) Asociativa: (x + y) + z = x + (y + z)
b) Conmutativa: x + y = y + x

Demostramos por inducción que para cada par de números naturales x, y ∈ ℕ, los conjuntos: $M_{x,y}=\{z\in N:(x+y)+z=x+(y+z)\}$ y $M_y=\{x\in N:x+y=y+x\}$ son iguales a ℕ.

1.3.3. Multiplicación en ℕ

Teorema: Existe una única aplicación h: ℕ x ℕ → ℕ que para cualesquiera x, y ∈ ℕ cumple:

i. h(x, y') = h(x, y)+x ii. h(x, 1) = x

A continuación se exponen las propiedades de esta operación, llamada multiplicación o producto de números naturales, que denotaremos "·", aunque se suele omitir, y que hacen de la terna (ℕ, +, ·) un **semianillo conmutativo con elemento unidad**.

1.3.4. Propiedades del producto de números naturales

El producto recién definido en ℕ tiene las siguientes propiedades para cualesquiera x, y, z ∈ ℕ.

a) Asociativa: (xy)z=x(yz)
b) Conmutativa: x. y = y. x
c) Elemento neutro: x1=1x=x
d) Distributiva (por derecha e izquierda): (x+y)z=xz+yz; z(x + y) = zx + zy

Las dos primeras propiedades se hacen por inducción, la tercera propiedad es consecuencia inmediata de la construcción del producto. La cuarta propiedad consiste en demostrar por inducción que para cada x, y ∈ ℕ, el conjunto: $M_{x,y}=\{z\in N:(x+y)z=xz+yz\}$ coincide con ℕ.

1.4. Ordenación de los números naturales

Sean x, y ∈ ℕ, se dice que x > y, "x es mayor que y", si existe u tal que x = y+u; si existe v tal que y = x+v, entonces x < y, "x es menor que y".

1. Sólo se podrá dar una de las siguientes opciones: x = y, x > y ó x < y:
2. Si x<y y y<z, entonces x<z (Propiedad transitiva).
3. Se cumple que x<y si y sólo si x+z<y+z.
4. Se cumple que x<y si y sólo si xz<yz.

1.5. Teorema del buen orden

Sea A un subconjunto no vacío de ℕ. Entonces, existe a∈A tal que a≤x para todo x∈A.

Como A no es vacío, elegimos a∈A y consideramos el conjunto: $B=\{b\in N : b\leq y,\ \forall y\in A\}$. Existe, entonces, y∈A, y'=y+1∈ ℕ, pero no pertenece a B, pues, desde luego, como B≠ℕ, a ∈ B, tal que a+1 no pertenece a B. Probando, entonces que a∈A, el teorema queda demostrado.

Luego, a∈A, pues, de no pertenecer a A, entonces a pertenecería a B, siendo a<y ∀y∈A, y, entonces, a+1≤y ∀y∈A, resultando a+1∈B, lo que ya quedó demostrado que no podía ser.

Corolario: Todo subconjunto A⊂ℕ no vacío, acotado superiormente (es decir, ∃k∈ℕ tal que x ≤ k para todo x∈A):

Sea A ⊂ ℕ, A ≠∅ y k ∈ ℕ tal que x ≤ k para todo x ∈ A, sea B = {z ∈ ℕ tal que x < z, ∀ x ∈ A}, B ≠ ∅ pues k∈B, por el teorema anterior existirá b ∈ B tal que b ≤ z, para todo z ∈ B (el mínimo de B).

Si probamos que b ∈ A, entonces ya estaría probado pues b ∈ B (x ≤ b, ∀ x ∈ A). Suponemos que b no pertenece a A, entonces x < b= u´, ∀ x ∈ A→x ≤ u, ∀ x ∈ A => u ∈ B y u < u´=b, luego no sería el mínimo.

1.6. El cero

Al conjunto ℕ se le añade un elemento 0, llamado cero, de manera que el orden, la suma y el producto en ℕ se extienden al conjunto ℕ U {0} definiendo:

1. Para el orden: 0 < 1
2. Para la suma: 0 + 0 = 0, 0 + n = n + 0 = n, para cada n ∈ ℕ
3. Para el producto: 0· 0 = 0, 0. n = n. 0 = 0, para cada n ∈ ℕ

El conjunto ℕ U {0} = {0, 1, 2, 3,...} es así naturalmente ordenado y, por tanto, isomorfo a ℕ para el orden. Además, la suma y el producto anteriores son compatibles con dicho orden y mantienen todas las propiedades de la suma y el producto de números naturales, con el añadido de la existencia de elemento neutro para la suma: el cero.

1.7. División de números naturales

Dividir un número m ∈ ℕ U {0} por otro n ∈ ℕ es hallar dos números q,r ∈ ℕ U {0}, llamados cociente y resto de la división, tales que m = nq +r, donde r<n.

Dado el número n, se trata de probar que el conjunto: $M_n=\{m\in N\ \mathrm{U}\{0\} : \text{existen } q,r\in NU\{0\}, r<n, m=qn+r\}$, coincide con ℕ. Puesto que 0∈M_n, pues basta elegir q=r=0, es suficiente comprobar que m'∈M_n para cada m∈M_n.

Como existen q, r∈ℕ tales que r<n y m=qn+r, se tiene m'=qn+r', lo que prueba, si r'<n, que m'∈M_n., mientras que en caso contrario ha de ser r'=n, luego: m'=qn+n=(q+1)n+0, de aquí m'∈M_n. Esto prueba la existencia. Para la unicidad, supongamos que existen q_1, r_1 y r_2 tales que $q_1n+ r_1=m= q_2n+ r_2$, $r_1, r_2<n$.

Probemos que $r_1 = r_2$. En caso contrario, podemos suponer que $r_1 < r_2$, lo que por 1.4 implica que $q_2 < q_1$. De este modo $q_2+1\leq q_1$, luego $q_2n+ n\leq q_1n$, y, en consecuencia, se tiene $q_2n+ r_2= q_1n+ r_1\geq q_2n+n+ r_1$.

Empleando, de nuevo, 1.4, se concluye que $r_2\geq n+ r_1\geq n$, y esto es falso. Así $r_2= r_1$ y, por tanto, $q_2n = q_1n$, es decir, $q_2= q_1$.

1.8. Los sistemas de numeración

En el sistema de numeración decimal usamos las cifras: {0, 1, 2,...,9}, el cual tiene como base el número 10, es decir, "cada 10 unidades de un orden determinado constituyen una unidad de orden inmediato superior":

En el sistema de numeración posicional en base $n \in \mathbb{N}$ $(n>1)$ se emplean n símbolos que representan los números naturales $A_n=\{0, 1, ..., n-1\}$. Para cada número natural k, el agregado de símbolos $a_k a_{k-1}...a_1 a_0$ donde $a_0, ..., a_k \in A_n$, representa el número natural: $n= a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k$.

Tres civilizaciones descubrieron, independientemente, los sistemas posicionales de numeración: los babilonios, que utilizaron la base n=60, al comienzo del segundo milenio antes de Cristo; los chinos, que emplearon la base 10, poco antes del comienzo de nuestra era; y los mayas, que usaron la base 20 desde el siglo IV d.C..

Estos sistemas de numeración presentaban dos carencias fundamentales. Por un lado, no dispusieron de un conjunto de símbolos con n elementos para representar los números naturales de A_n, sino que empleaban muchos menos. Por otro, las dos últimas carecían de símbolo para 0, mientras que los babilonios, que lo utilizaron para sustituir sus iniciales "huecos", no lo empleaban en la posición final, lo que, por ejemplo, impedía distinguir los números $3(60)^2+5(60)$ y $3(60)^4+5(60)^3$.

El sistema de numeración posicional y decimal, tal y como es usado en nuestros días, fue descubierto por la civilización hindú, e introducido en Europa por los árabes.

Así, el resultado fundamental acerca de los sistemas de numeración es el conocido como "Teorema fundamental de la numeración".

1.8.1. Teorema fundamental de la numeración

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n>1$ y $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Existen números naturales $a_0, ..., a_k$ menores que n tales que:

$$\boxed{m = a_0 . n^0 + a_1 . n^1 + a_2 . n^2 + ... + a_k . n^k} \ (1)$$

Además, si $a_k \neq 0$, los números $a_0, ..., a_k$ que cumplen (1) son menores que n y son únicos.

Demostremos por inducción que $\mathbb{N}$ coincide con el conjunto $A=\left\{k \in N : \text{cada } p \in N \cup \{0\} \text{ con } p<n^{k+1} \text{ admite una escritura de la forma } (1)\right\}$.

Es claro que $0 \in A$, pues cada número natural $p<n$ admite una escritura de la forma (1) con $a_0=p$. Por tanto, es suficiente demostrar que si $k \in A$, cada número natural p tal que $p<n^{k+2}$ admite una escritura de la forma (1)para exponente k+1. En virtud de 1.7, dividiendo p entre n^{k+1}, existen $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $r<n^{k+1}$ y $p=qn^{k+1}+r$.

Ahora, por un lado, como $k \in A$ y $r<n^{k+1}$, existen, por la hipótesis de inducción, números naturales $a_0, ..., a_k$ menores que n tales que $r= a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k$. Además, en virtud de 1.4.4, $q<n$, luego denotando $a_{k+1}=q$, obtenemos la escritura: $p=r+qn^{k+1}= a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k + a_{k+1} n^{k+1}$.

Para la unicidad, supongamos que existen dos escrituras:

$$a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k = b_0 + b_1 n + ... + b_s n^s \ (2),$$

de modo que todos los a_i y b_j son menores que n y $a_k b_s \neq 0$. Probaremos en primer lugar que k=s. En caso contrario, sería, por ejemplo, k<s, de donde:

$$a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k \leq (n-1)(1+n+...+n^k)=n^{k+1}-1<n^s \leq b_0 + b_1 n + ... + b_s n^s,$$

que es una contradicción. De este modo, la igualdad (2), se lee:

$$n = a_k n^k + (a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1} n^{k-1})= b_s n^s + (b_0 + b_1 n + ... + b_{s-1} n^{s-1})$$

Ambos miembros se pueden interpretar como divisiones del número p entre n^k, luego por la unicidad del cociente y el resto de la división resulta que:

$$a_k=b_s \text{ y } a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1} n^{k-1}= b_0 + b_1 n + ... + b_{s-1} n^{s-1}$$

Reiterando el proceso, se concluye que $a_i=b_i$ para cada índice i con $0 \leq i \leq k$.

Ejemplo 1: Paso de base n a base decimal:

$m = r_0 . n^0 + r_1 . n^1 + r_2 . n^2 + ... + r_k . n^k$, es suficiente con operar.

Por ejemplo: $123_{(5} = 1.5^2 + 2.5 + 3 = 38$

Ejemplo 2: Paso de base decimal a base n:

En este caso, por el teorema fundamental de la numeración realizamos la división m: n.

Se divide por esta base tantas veces como sea necesario hasta obtener un resto menor que la base; después, se anotan como numerales el último cociente y, en orden inverso, los sucesivos restos obtenidos.

Por ejemplo: Paso de 145 a base 3.

1. 145:3=48 R=**1**→145=3·48+1   2. 48:3=16 R=**0**→48=3·16+0

3. 16:3=5 R=**1**→16=3·5+1   3. 5:3=**1** R=**2**→5=3·1+2 $\mathbf{145=12101_{(3}}$

1.9. Resumen

	Teorema		Propiedades	
Números naturales	Definición mediante axiomas de Peano.		El elemento 1 es elemento mínimo. S(n)=n’ y es único.	
Adición	f(x, y’) = f(x, y)´	f(x, 1) = f(x)’	Asociativa	Conmutativa
Multiplicación	h(x,y’)=h(x,y)+x	h(x, 1) = x	Asociativa	Conmutativa
			Elemento neuro: 1	Distributiva
Ordenación y teorema del buen orden	Sólo se podrá dar x = y, x > y ó x < y		Transitiva y compatible con adición y multiplicación	
El cero	Al conjunto ℕ se le añade un elemento 0 → ℕ U {0}		Para el orden: 0 < 1 Para la suma: 0 + 0 = 0, 0 + n = n +0 =n Para el producto: 0· 0 = 0, 0. n = n.0 =0	
División	m = nq +r		-	
Teorema fundamental de la numeración	Base n ∈ ℕ (n>1): $m= a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k$		-	

1.10. Conclusión

DESARROLLO TEMA

A lo largo del tema hemos definido el concepto de número natural, su origen y las bases sobre las que se erige la propuesta, además de las propiedades que les caracterizan. Para desarrollarlo, hemos visto qué es la adición y la multiplicación en el conjunto de los números naturales, así como una serie de propiedades. Cabe destacar la utilidad del teorema del buen orden, la división y los sistemas de numeración, que tanto utilizaremos en la asignatura de Matemáticas.

APLICACIONES

En nuestra vida diaria estamos rodeados de números por todas partes. Preguntas tan sencillas y habituales como: “¿Cuántos años tienes?”, “¿Cuánto cuesta un libro?” ó “¿Cuál es tu número de teléfono?” hacen evidente la necesidad de su correcta comprensión y aplicación, pues, en estas situaciones, están involucrados los números naturales. En general, los números naturales tienen varias funciones en la vida cotidiana, como contar los elementos de un conjunto (número cardinal), expresar la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (número ordinal), identificar y diferenciar los números en un contexto dado, identificar cantidades o comparar.

1.11. Bibliografía

ABELLANAS CEBOLLERO: INTRODUCCIÓN A LA Matemática. Ed. Saeta. Madrid, 1987.

BOYER: Historia de la Matemática. Ed. Alianza. Madrid, 1992.

FERNÁNDEZ VIÑA: Análisis Matemático. Ed. Tecnos. Madrid, 1992.

MARTÍNEZ, BUJANDA, VELLOSO: Matemáticas I. Ed. SM. Madrid, 1981.

TEMARIO DEIMOS

TEMARIO GAMBOA

TEMARIO MATEMÁTICAS DIVERTIDAS

TEMARIO CLAUSTRO