

Matrices

Operaciones con matrices

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am+bo+cq & an+bp+cr \\ dm+eo+fq & dn+ep+fr \end{pmatrix}$$

2×3 3×2 2×2

Propiedades

$$\begin{aligned} AB &\neq BA & (A^T)^T &= A \\ AI &= IA = A & (A+B)^T &= A^T + B^T \\ A^{-1}A &= AA^{-1} = I & (AB)^T &= B^T A^T \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

Ecuaciones y sistemas matriciales

Despejamos utilizando las propiedades y resolvemos

Matriz inversa

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operamos}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m & n & o \\ 0 & 1 & 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & 1 & s & t & u \end{pmatrix}$$

A I I A^{-1}

Rango de una matriz

Número de filas linealmente independientes

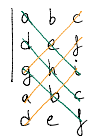
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operamos}} \begin{pmatrix} m & n & o \\ o & p & q \\ o & o & o \end{pmatrix}$$

buscando ceros bajo la diagonal

Rango 2

@ La profe de mate mola

Determinantes



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = [aei + bfg + cdh] - [ceg + afh + bdi]$$

Propiedades

$$\begin{aligned} |A| &= |A^T| & |AB| &= |A||B| \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ o & o & o \end{vmatrix} &= 0 & \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c+ka \\ d & e & f+kd \\ g & h & i+kg \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b & ck \\ d & e & f \cdot k \\ g & h & i \cdot k \end{vmatrix} &= k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} &= 0 & \begin{vmatrix} a & b & c+x \\ d & e & f+y \\ g & h & i+z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Para simplificar el cálculo de determinantes de órdenes superiores utilizaremos las propiedades prestando atención a los cambios que provocamos con ellos y ajustando para equilibrar esos cambios.

Matriz inversa

Si $|A| \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj} A)^T$$

Rango

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} \neq 0 \text{ Rg } 3 \\ \leq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \neq 0 \text{ Rg } 2 \\ \leq 0 \text{ Rg } 1 \end{matrix}$$

Máximo orden de sus menores no nulos.

Determinante por adjuntos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Sistemas

- S. Compatible Determinado $\rightarrow 1$ sol.
- S. Compatible Indeterminado $\rightarrow \infty$ sol.
- S. Incompatible $\rightarrow$ sin sol.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$$

Método de Gauss

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operamos}} \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

A A' $n \times m$ SCD $\begin{cases} 0 \times 0$ SCI $\begin{cases} 0 \times n$ SI

Método de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}}$$

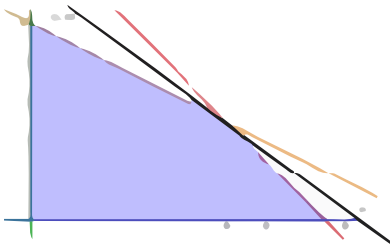
Discusión mediante rangos

$$\begin{aligned} \text{SCD} \quad & Rg(A) = Rg(A') = N^\circ \text{ incóg.} \\ \text{SCI} \quad & Rg(A) = Rg(A') \neq N^\circ \text{ incóg.} \\ \text{SI} \quad & Rg(A) \neq Rg(A') \end{aligned}$$

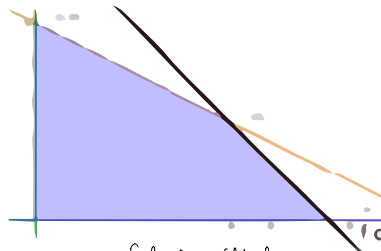


Programación lineal

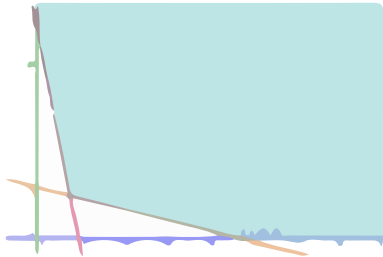
Tipos de soluciones



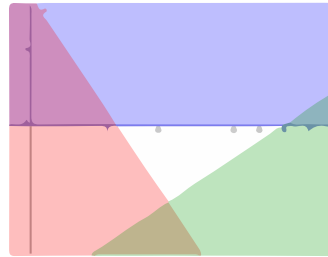
Solución única



Solución múltiple



Solución no acotada



No factible

Planteamiento de problemas

1. Formar una tabla donde estén recogidos todos los datos del problema.
2. Determinar cuáles van a ser las variables que formarán la función objetivo y nombrarlas.
3. Determinar las restricciones que nos muestra el problema sin olvidar ninguna y siempre según las variables determinadas en el paso anterior.
4. Determinar la función objetivo a optimizar.
5. Aplicar los pasos del Método Gráfico.



Método gráfico

1. Graficar las rectas determinadas por las restricciones.

2. Encontrar la región intersección.

3. Determinar los vértices o esquinas.

4. Evaluar la función objetivo en los vértices.

5. Escoger el menor o mayor valor

Límites



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, se cumple:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a + b$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a - b$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \cdot b$
- 4) Si $b \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{a}{b}$
- 5) Si $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = a^b$

SUMAS/RESTAS:

$$\begin{aligned} (+\infty) + (l) &= (+\infty) \\ (+\infty) + (+\infty) &= (+\infty) \\ (-\infty) + (l) &= (-\infty) \\ (-\infty) + (-\infty) &= (-\infty) \\ -(-\infty) &= (+\infty) \end{aligned}$$

COCIENTES:

$$\begin{aligned} \frac{(l)}{(\pm\infty)} &= (0) \\ \frac{1}{0} &= (\pm\infty), \text{ si } l \neq 0 \\ \frac{(\pm\infty)}{(0)} &= (\pm\infty) \\ \frac{0}{(\pm\infty)} &= (0) \end{aligned}$$

PRODUCTOS:

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot (+\infty) &= (+\infty) \\ (+\infty) \cdot (-\infty) &= (-\infty) \\ \text{Si } l > 0 &\rightarrow \begin{cases} (+\infty) \cdot (l) = (+\infty) \\ (-\infty) \cdot (l) = (-\infty) \end{cases} \\ \text{Si } l < 0 &\rightarrow \begin{cases} (+\infty) \cdot (l) = (-\infty) \\ (-\infty) \cdot (l) = (+\infty) \end{cases} \end{aligned}$$

POTENCIAS:

$$\begin{aligned} (+\infty)^{(+\infty)} &= (+\infty) \\ (+\infty)^{(-\infty)} &= (0) \\ \text{Si } l > 0 &\rightarrow (+\infty)^{(l)} = (+\infty) \\ \text{Si } l < 0 &\rightarrow (+\infty)^{(l)} = (0) \\ \text{Si } l > 1 &\rightarrow \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (+\infty) \\ (l)^{(-\infty)} = (0) \end{cases} \\ \text{Si } 0 < l < 1 &\rightarrow \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (0) \\ (l)^{(-\infty)} = (+\infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Límites en el infinito

Exponenciales Polinómicas Logarítmica Constantes

Indeterminaciones

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$: Analizaremos los términos dominantes tanto del numerador como del denominador.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\infty - \infty$: Aparecen al calcular límites con diferencia de cociente de polinomios o radicales. Pueden resolverse desarrollando la resta convenientemente o multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada, respectivamente.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{0}{0}$: Aparecen al calcular límites con funciones polinómicas o funciones irracionales. En ambos casos intentaremos simplificar la fracción, normalmente factorizando el numerador y el denominador mediante la Regla de Ruffini o usando igualdades notables.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $0 \cdot \infty$: Se resuelven transformándolas en las del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o en las del tipo $\frac{0}{0}$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO 1^∞ : Aparecen si la función es de la forma:

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Se resuelven resolviendo el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x) - 1]}$$

Asíntotas

LÍMITES INFINITOS EN UN PUNTO: Diremos que la recta $x = a$ (donde a es un número) es una **ASÍNTOTA VERTICAL** si existen alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

LÍMITES FINITOS EN EL INFINITO: Diremos que la recta $y = a$ (donde a es un número) es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

LÍMITES FINITOS EN EL INFINITO: Diremos que la recta $y = mx + b$ (donde a, b son dos números cualquiera) es una **ASÍNTOTA OBLICUA** si existen y son finitos los límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= b \end{aligned}$$

Continuidad

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Una función $y = f(x)$ es CONTINUA EN UN PUNTO $x = c$ si:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

FUNCIÓN CONTINUA EN UN INTERVALO: Una función $y = f(x)$ se dice que es CONTINUA EN UN INTERVALO DE $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto del intervalo.

CONTINUIDAD LATERAL:

Una función $y = f(x)$ es CONTINUA POR LA IZQUIERDA EN EL PUNTO $x = c$ si existe el límite por la izquierda en ese punto y coincide con el valor de la función en c .

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

Una función $y = f(x)$ es CONTINUA POR LA DERECHA EN EL PUNTO $x = c$ si existe el límite por la derecha en ese punto y coincide con el valor de la función en c .

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

- Las FUNCIONES POLINÓMICAS son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las FUNCIONES RACIONALES no son continuas en los puntos en los que se anula el denominador.
- Las FUNCIONES RADICALES con índice para no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las FUNCIONES EXPONENCIALES son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las FUNCIONES LOGARÍTMICAS no son continuas en los puntos en los que la expresión de la que queremos hallar el logaritmo se convierte en cero o en un número negativo.

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Una función que no es continua en un punto $x = c$, decimos que es DISCONTINUA en ese punto.

DISCONTINUIDAD EVITABLE: El límite de la función en c existe y es finito pero no coincide con el valor de la función en c . La función no está definida en c .

DISCONTINUIDAD NO EVITABLE:

DISCONTINUIDAD DE PRIMERA ESPECIE: cuando existen los límites laterales pero son distintos, por lo que no existe el límite de la función.

Ambos son finitos $\rightarrow$ SALTO FINITO.

Uno de los límites laterales es infinito $\rightarrow$ SALTO INFINITO

DISCONTINUIDAD DE SEGUNDA ESPECIE: uno o los dos límites laterales no existen.

@ La profe de mate mola

Derivadas

Propiedades

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Derivada de la suma o resta:	Derivada del producto por un número:
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
Derivada del producto:	Derivada del cociente:
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Derivada de la composición (R. cadena):	
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	

Derivadas inmediatas

FUNCIÓN	DERIVADA	DERIVADA COMPUESTA
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$(g^n(x))' = n \cdot g^{n-1}(x) \cdot g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{g(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x) \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$(a^{g(x)})' = a^{g(x)} \cdot \ln(a) \cdot g'(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$(\sin(g(x)))' = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$(\cos(g(x)))' = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$(\tan(g(x)))' = \frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x)$
$f(x) = \arcsen(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsen(g(x)))' = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos(g(x)))' = \frac{-1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$f(x) = \text{arctag}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(\text{arctag}(g(x)))' = \frac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = \cot(g(x))$	$f'(x) = \cos \text{ec}^2(x)$	$(\cot(g(x)))' = \cos \text{ec}^2(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x) \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$(\sec(g(x)))' = \sec(g(x)) \tan(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \text{cosec}(x)$	$f'(x) = -\text{cosec}(x) \cot(g(x)) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$	$(\text{cosec}(g(x)))' = -\text{cosec}(g(x)) \cot(g(x)) \cdot g'(x)$

Casos particulares

$$y = f(x)^{g(x)}$$

- 1) Tomamos logaritmos.
- 2) Derivamos.
- 3) Despejamos y'.
- 4) Sustituimos el valor de y.

@ La profe de mate mola

Integrales

Primitiva

Primitiva de una función: Sea F(x) la primitiva de f(x): $F'(x) = f(x)$
 $\int f(x) dx = F(x) + C$

Propiedades

Integración por partes	Derivada del producto por un número:
$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$	$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Integrales inmediatas

FUNCIÓN	INTEGRAL	INTEGRAL COMPUESTA
$f(x) = x$	$\int a \cdot dx = ax + C$	
$f(x) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int [u(x)]^n \cdot u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + C$
$f(x) = \ln(x)$	$\int \frac{1}{x} dx = L x + C$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = L u(x) + C$
$f(x) = \log_a(x)$	$\int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a x + C$	$\int \frac{u'(x)}{u(x) \ln a} dx = \log_a u(x) + C$
$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + C$
$f(x) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
$f(x) = \sin(x)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + C$
$f(x) = \tan(x)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx = \tan u(x) + C$
$f(x) = \arcsen(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = \arcsen u(x) + C$
$f(x) = \arccos(x)$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} dx = \arccos u(x) + C$
$f(x) = \text{arctag}(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg} x + C$	$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2} dx = \text{arctg} u(x) + C$
$f(x) = \cot(g(x))$	$\int \frac{1}{\tan^2 x} dx = -\cotan x + C$	$\int \frac{u'(x)}{\tan^2(u(x))} dx = -\cotan u(x) + C$
$f(x) = \sec(x)$	$\int \sec^2 x dx = \text{tg} x + C$	$\int \sec^2 u(x) \cdot u'(x) dx = \text{tg} u(x) + C$
$f(x) = \text{cosec}(x)$	$\int \text{cosec} x \cdot \cot g x dx = -\text{cosec} x + C$	$\int u'(x) \text{cosec} u(x) \cdot \cot g u(x) dx = -\text{cosec} u(x) + C$



Representación de funciones

DOMINIO Y CONTINUIDAD	Se determina el conjunto de los números reales para los que se puede calcular el valor de la función $f(x)$. Este conjunto nos indicará los valores donde $f(x)$ es continua.	
	Funciones polinómicas: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$ Funciones irracionales de índice par $f(x) = \sqrt{P(x)}$: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}: P(x) \geq 0\}$	Funciones exponenciales $f(x) = e^{g(x)}$: $Dom(f) = Dom(g)$ Funciones logarítmicas $f(x) = \log(g(x))$: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$
SIMETRÍA	Función par: $f(x)$ es simétrica respecto del eje OY. Se cumple que $f(-x)=f(x)$. Función impar: $f(x)$ es simétrica respecto del origen. Se cumple que $f(-x)=-f(x)$.	
PERIODICIDAD	$f(x)$ es periódica de periodo T si $f(x+T)=f(x)$. Esta propiedad la presentan, sobre todo, algunas funciones trigonométricas, por eso en la práctica sólo se tiene en cuenta para este tipo de funciones.	
PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES	Con el eje de abscisas (OX), se resuelve la ecuación $f(x)=0$. Puede haber uno, varios o infinitos puntos. Con el eje de ordenadas (OY), se resuelve $f(0)$. Puede haber uno o ningún punto de corte con este eje. Si la función pasa por el origen, este punto aparecen en ambos casos.	
ASÍNTOTAS	Asíntota vertical: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ Para la posición de la curva: $f(x) - l$ $f(x) - l > 0$ $f(x) - l < 0$ $f(x) - l = 0$ por encima por debajo oscilante Asíntota oblicua: $y=mx+n$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, m \neq 0, \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbb{R}$ Para la posición de la curva: $f(x) - l$ $f(x) - l > 0$ $f(x) - l < 0$ $f(x) - l = 0$ por encima por debajo oscilante	
MONOTONÍA (crecimiento, máximos y mínimos)	Estudiamos la derivabilidad y calculamos la derivada de $f(x)$. i) Si $f'(x_0) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en x_0 ; si $f'(x_0) < 0$, f es estrictamente decreciente en x_0 . ii) Si f es creciente en x_0 , entonces $f'(x_0) \geq 0$; si f es decreciente en x_0 , $f'(x_0) \leq 0$. Tenemos un máximo si es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha (resp. mínimo).	
CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN	Calculamos la segunda derivada de $f(x)$. Si $f''(x_0) > 0$, para todo $x \in I$, f es estrictamente cóncava ($\cup$); si $f''(x_0) < 0$, f es estrictamente convexa ($\cap$). Punto de inflexión: $f''(x_0) > 0$, y se produce un cambio de cóncavo a convexo o viceversa.	
TABLA DE VALORES	Se recomienda hacer una tabla de valores, a modo de resumen. Siempre se pueden calcular algunos puntos adicionales si lo vemos necesario para una mejor representación.	
REPRESENTACIÓN GRÁFICA	Con la información obtenida en los puntos anteriores, dibujamos la gráfica de la función. Primero representamos los puntos obtenidos, después las asíntotas y por último la gráfica de la función.	

ESPACIO MUESTRAL ($\mathbb{E}$ o Ω) conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

- SUCESO $\rightarrow$ cualquier subconjunto del espacio muestral.

- Sucesos elementales formados por un elemento de $\mathbb{E}$.
- Suceso seguro: es el propio conjunto $\mathbb{E}$.
- Suceso imposible: es el conjunto vacío $\emptyset$

- OPERACIONES CON SUCESOS

- Unión: $A \cup B$: formado por los elementos de A y los de B.
- Intersección: $A \cap B$: formado por los elementos que pertenecen a la vez a A y a B.
- Diferencia: $A - B$: formado por los elementos de A que no son de B.
- Complementario: A^c o $\bar{A}$: formado por los elementos que no son de A.

- Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- SUCESOS INCOMPATIBLES: son aquellos que verifican que su intersección es el conjunto vacío.
 A y B son incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

• DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD $P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos totales}}$
 (Ley de Laplace)

- Se cumple que:

- $P(A) \geq 0$
- si dos sucesos son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• $P(\mathbb{E}) = 1$
 De esto se deduce que $\begin{cases} \bullet P(A^c) = 1 - P(A) \\ \bullet P(\emptyset) = 0 \\ \bullet \text{Si } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \\ \bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$
 (Principio Inclusión-Exclusión)

• $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

• PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Si dos sucesos son independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Obviamente si A y B son independientes $\rightarrow P(A|B) = P(A)$
 $\rightarrow P(B|A) = P(B)$

• PROBABILIDAD TOTAL

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ sucesos incompatibles dos a dos y tal que $\mathbb{E} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

Entonces se cumple que para cualquier suceso A se verifica.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \mathbb{E}) = P(A \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)) = \\ &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_n) = \\ &= P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2) \cdot P(A|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(A|A_n) \end{aligned}$$

• TEOREMA DE BAYES (PROBABILIDAD A POSTERIORI)

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1) \cdot P(A|A_1)}{P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \dots + P(A_n)P(A|A_n)}$$

↑ probabilidad total de A. ↑

(vale para $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ - cualquiera -)



Variables aleatorias

Variables aleatorias discretas

- Esperanza (media) de una variable aleatoria discreta: $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i (P(x_i) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)$.
- Varianza de una v.a. discreta: $Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^n (P(x_i) x_i^2 - \mu^2)$
- Función de distribución: $F(X) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

Distribución de Bernoulli

Sea un experimento con dos posibles resultados, generalmente llamados éxito y fracaso para los que $P[\text{éxito}] = p$ y $P[\text{fracaso}] = 1 - p = q$. Verifica $rg(x) = \{0,1\}$.

Notación	Función de probabilidad
$X \sim Be(p), p \in [0,1]$	$P[X = x] = p^x (1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}$
Esperanza	Varianza
$E[x] = p$	$Var[X] = pq$

Distribución Binomial

Consideramos n experimentos de Bernoulli independientes e idénticamente distribuidos y sea la variable aleatoria X definida como el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli. Verifica $rg(x) = \{0,1, \dots, n\}$. Es muestreo con reemplazamiento.

$X \sim B(n, p), p \in [0,1]$	$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, n\}$
$E[x] = np$	$Var[X] = npq$

Dadas $X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p)$ independientes entonces $X + Y \sim B(n + m, p)$

Variables aleatorias continuas

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función de densidad sobre $\mathbb{R}$ si verifica:

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$



Características

- Esperanza de una variable aleatoria continua: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.
- Varianza de una v.a. continua: $Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2]$.

Distribución Normal

Permite describir un número muy grande de fenómenos aleatorios, como por ejemplo aquellos en los que intervienen un número elevado de factores no controlables, que actúan de manera independiente y con efectos pequeños. Función normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.

Notación	Función de densidad
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Distribución Normal (0,1)

Notación	Función de densidad
$X \sim N(0,1)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tablas

¿Cómo trabajar con tablas de distribución normal?

$P(Z \leq a)$, escribimos el número correspondiente que aparece en la tabla.

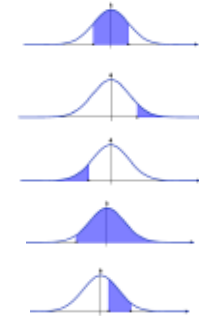
$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(Z \geq -a) = P(Z \leq a)$$

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$

Es posible que haya casos como el tres dentro de los subcasos $P(Z \leq b)$ y $P(Z \leq a)$



Tipificación

Sea X una variable aleatoria continua cuya probabilidad se distribuye como una distribución $N(\mu, \sigma)$ entonces la variable aleatoria $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ se distribuye como una $N(0,1)$.

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Aproximación de la binomial por la normal

Sea X una variable aleatoria **discreta** cuya distribución de probabilidad es una $B(n,p)$ y que verifica que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces la distribución de la variable X se puede aproximar mediante una distribución normal $N(np, \sqrt{npq})$.

$X \sim B(n, p)$ con $np \geq 5$ $nq \geq 5 \rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$.

- $P(X = a) = P(a - 0,5 < X' < a + 0,5)$
- $P(X < a) = P(X' < a - 0,5)$
- $P(X \leq a) = P(X' < a + 0,5)$
- $P(X > a) = P(X' > a + 0,5)$
- $P(X \geq a) = P(X' > a - 0,5)$



Estadística

Inferencia estadística

Parámetro de la población	Variable muestral	Distribución muestral	Intervalo de confianza	Error máximo	Tamaño de la muestra
Media μ	$\bar{X}$	$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$
Proporción P	$\hat{P}$	$\hat{P} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$	$\left(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$	$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$	$n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{pq}{E^2}$

$q=1-p$

Amplitud intervalo de confianza=2E	$(\bar{X} - E, \bar{X} + E)$	
$\bar{X}$ y $\hat{P}$ puntos medios de los intervalos	$(\hat{P} - E, \hat{P} + E)$	

Punto medio del intervalo $(a, b) \rightarrow \frac{a+b}{2}$

$1 - \alpha = \text{nivel de confianza}$		$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1 + (1 - \alpha)}{2} \text{ ó } 1 - \frac{\alpha}{2}$
$\alpha = \text{nivel de significación}$		$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

Contraste de hipótesis

Media μ			
	Bilaterales	Unilaterales	
H_0 : Hipótesis nula	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$
H_1 : Hipótesis alternativa	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$
Nivel de confianza	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$
Región de aceptación	$\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$	$(-\infty, z_{\alpha})$	$(-z_{\alpha}, \infty)$
Estadístico	$Z \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = N(0,1)$	$Z \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = N(0,1)$	$Z \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = N(0,1)$
Proporción P			
	Bilaterales	Unilaterales	
H_0 : Hipótesis nula	$H_0: p = p_0$	$H_0: p \leq p_0$	$H_0: p \geq p_0$
H_1 : Hipótesis alternativa	$H_1: p \neq p_0$	$H_1: p > p_0$	$H_1: p < p_0$
Nivel de confianza	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$
Región de aceptación	$\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$	$(-\infty, z_{\alpha})$	$(-z_{\alpha}, \infty)$
Estadístico	$Z \equiv \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \equiv N(0,1)$	$Z \equiv \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \equiv N(0,1)$	$Z \equiv \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \equiv N(0,1)$

