Variables aleatorias continuas. Función de densidad y función de distribución

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es una función de densidad sobre $\mathbb{R}$ si verifica:

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c) f tiene a lo sumo una cantidad numerable de puntos de discontinuidad sobre cada intervalo de $\mathbb{R}$ (luego es integrable Riemann).

Una variable aleatoria X se dice que es continua si existe una función de densidad f tal que su función de distribución F_X se puede expresar como: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Características de las variables aleatorias continuas

- Esperanza de una variable aleatoria continua: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.
- Momento de orden k de una variable aleatoria continua: $\sigma_k = E(X^k)$.
- Momento central de de orden k de una v.a. continua: $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$.
- Varianza de una v.a. continua: $Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2]$.
- Función generatriz de momentos: $g_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)dx$.
    - Propiedad: $g_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X^n) \Longrightarrow g_X'(0) = E(X)$.

Distribución Normal

Permite describir un número muy grande de fenómenos aleatorios, como por ejemplo aquellos en los que intervienen un número elevado de factores no controlables, que actúan de manera independiente y con efectos pequeños. Función normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.

Notación	Función de densidad
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Esperanza	**Varianza**
$E[x] = \mu$	$Var[X] = \sigma^2$

La gráfica de la función de densidad se denomina curva normal (o campana de Gauss).

$$g_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

El teorema central del límite

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes distribuidas con media μ y varianza σ^2, ambas finitas. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces la distribución de la variable: $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$ converge en distribución a una N(0,1).

En la práctica, siempre que n>30 la distribución de S_n se aproximará a una $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Distribución exponencial

Este modelo suele utilizarse para variables que describen el tiempo hasta que se produce un determinado suceso.

$X \sim E(\alpha)$	$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; si \; x \leq 0 \end{cases}$
$E[x] = \frac{1}{\alpha}$	$Var[X] = \frac{1}{\alpha^2}$

- Función de distribución: $F(X) = 1 - e^{-\alpha x} \; si \; x \geq 0$.
- Desviación típica: $\sigma = \frac{1}{\alpha}$.
- Propiedad asociada: $P(X \geq a + b | X \geq a) = P(X \geq b)$.

Distribución uniforme

Supondremos que es distribución uniforme si lo único que sabemos de la variable es <u>el intervalo en el que está definida</u>.

$X \sim \mho(a, b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \; si \; a \leq x \leq b \\ 0 \; en \; el \; resto \end{cases}$
$E[x] = \frac{a+b}{2}$	$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

- Función de distribución: $F(X) = P(X \leq x) = \; si \; a \leq x \leq b$.

TRUCOS

- Si la función de densidad es simétrica, será: $2\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$.
- $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.
- Los espacios muestrales se pueden obtener como el área de un rectángulo.
- Cuando aproximamos una distribución discreta a una continua, debemos realizar unas correcciones por continuidad para poder tipificar.