Características de las variables aleatorias discretas

- Esperanza de una variable aleatoria discreta: $E(X) = \sum_{n\geq 1} x_n P(X = x_n)$.
- Momento de orden k de una variable aleatoria discreta: $\sigma_k = E(X^k)$.
- Momento central de de orden k de una v.a. discreta: $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$.
- Varianza de una v.a. discreta: $Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2]$= $E(X^2) - E(X)^2$
- Coeficiente de asimetría: $c.a. = \frac{\mu_3}{\sigma_3}$
- Función de distribución: $F(X) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

Distribución Uniforme Discreta

Diremos que una variable aleatoria discreta tiene una distribución Uniforma de parámetro N, $N \geq 1$, si $rg(x) = \{1,2,\dots,N\}$.

Notación	Función de probabilidad	Esperanza	Varianza
$X \sim UD(N)$	$P[X = x] = \frac{1}{N}$, x=1, 2, …, N	$E[x] = \dfrac{N+1}{2}$	$Var[X] = \dfrac{N^2 - 1}{12}$

Distribución de Bernouilli

Sea un experimento con dos posibles resultados, generalmente llamados éxito y fracaso para los que P[éxito]=p y P[fracaso]=1-p=q. Verifica $rg(x) = \{0,1\}$.

Notación	Función de probabilidad
$X \sim Be(p), p \in [0,1]$	$P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}$
Esperanza	**Varianza**
$E[x] = p$	$Var[X] = pq$

Distribución Binomial

Consideramos n experimentos de Bernouilli independientes e idénticamente distribuidos y sea la variable aleatoria X definida como el número de éxitos en n pruebas de Bernouilli. Verifica $rg(x) = \{0,1,\dots,n\}$. Es muestreo con reemplazamiento.

$X \sim B(n,p), p \in [0,1]$	$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0,n\}$
$E[x] = np$	$Var[X] = npq$

Dadas $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$ $independientes\ entonces\ X + Y \sim B(n+m,p)$

Distribución Multinomial

Cada prueba tiene más de dos resultados posibles. Si un experimento puede tener como consecuencia k posibles resultados $E_1, E_2, \dots, E_k$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k$, entonces la multinomial da la probabilidad de que E_1 ocurra x_1 veces y así sucesivamente en n pruebas independientes con $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ y $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

$\mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_k; n)$	$P[X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k] = \dfrac{n!}{x_1! \dots x_k!} {p_1}^{x_1} \cdot \dots \cdot {p_k}^{x_k}$

Distribución Hipergeométrica

No requiere independencias y es muestreo sin reemplazamiento. Conjunto de N elementos en el que hay N_1 elementos del tipo 1 y N-N_1 elementos del tipo 2. Extraemos n sin reemplazamiento y la variable aleatoria X="número de elementos del tipo 1". X sigue distribución hipergeométrica de parámetros N, N_1 y n con n≤N si verifica: $rg(X) = \{máx(0, n - (N - N_1)), \dots, mín(n, N_1)\}$.

$X \sim \mathrm{H}(N, N_1, n), 0 \leq k \leq N_1, 0 \leq n - k \leq N - N_1$	$P[X = k] = \dfrac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in rg(X)$

$E[x] = n\dfrac{N_1}{N}$	$Var[X] = n\dfrac{N_1}{N}\left(1-\dfrac{N_1}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

Distribución Geométrica

Pruebas de Bernouilli independientes e idénticamente distribuidas con la misma probabilidad de éxito, p, en cada prueba.

X="número de fracasos antes de obtener el primer éxito". Verifica: $rg(x) = \{0,1,2,\dots\}$.

$X \sim Ge(p), p \in (0,1]$	$P[X=k] = q^k p, k \in \{0,k\}$ $\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = p\dfrac{1}{1-q} = p\dfrac{1}{p} = 1$
$E[x] = \dfrac{q}{p}$	$Var[X] = \dfrac{q}{p^2}$

Distribución de Poisson

Estudia el número de eventos independientes que ocurren a velocidad constante en un intervalo de tiempo o espacio. Una variable aleatoria X discreta, sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si $rg(x) = \{0,1,2,\dots\}$.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$	$P[X=k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,\dots$ $\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$
$E[x] = \lambda$	$Var[X] = \lambda$

- Propiedad reproductiva de la Poisson: $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)\ independientes\ entonces\ X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- Poisson desplazada (ejemplo): $P[X=k] = e^{-\lambda q}\frac{\lambda q^{n-k}}{n-k!}, E[x] = \lambda q + k\ y\ la\ varianza\ no\ varía.$

TRUCOS

- Cálculo de la mediana, usamos la función de distribución igualada a ½.
- **IDENTIDAD DE VANDERMONDE**: $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$.