Cónica como lugar geométrico

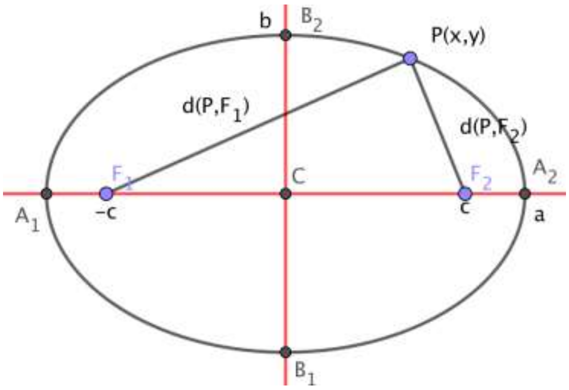
Si ε <1 la cónica se llama elipse, si ε = 1 parábola y si ε >1 hipérbola.

Sea P(x,y) es un punto cualquiera de la cónica, F(x_0, y_0) el foco de la cónica y la recta d ≡ αx + βy +γ la directriz, tenemos:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)}=\varepsilon \Rightarrow \frac{d(P,F)^2}{d(P,d)^2}=\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(\alpha' x+\beta' y+\gamma')^2}=\varepsilon^2, donde \begin{cases}\alpha'=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \beta'=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\end{cases} \gamma'=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

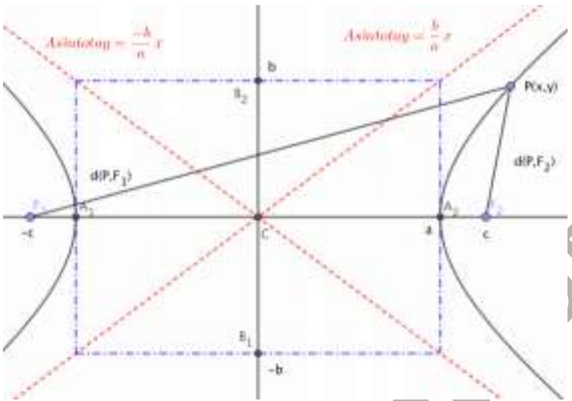
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\varepsilon^2(\alpha' x+\beta' y+\gamma')^2=0 \rightarrow ecuación\ focal\ de\ la\ cónica$$

Elipse



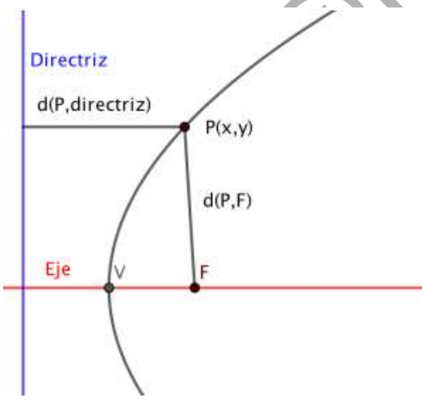
<table>
<tr><td colspan="2">Siendo a y b semiejes mayor y menor y c semidistancia focal y consideramos los ejes como ejes cartesianos: $a^2=b^2+c^2$
$d(F_1,P)+d(F_2,P)=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$</td></tr>
<tr><td>Reducida y paramétrica
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$\gamma(t)=(acost,bsent)$</td><td>Ecuación focal
$(x-c)^2+y^2-\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Foco: (c,0), directriz: $x=\frac{a^2}{c}$ y $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $y\ c<a \Rightarrow \varepsilon<1$</td></tr>
</table>

Hipérbola



<table>
<tr><td colspan="2">Siendo a y b semiejes mayor y menor y c semidistancia focal y consideramos los ejes como ejes cartesianos: $c^2=a^2+b^2$
$d(F_1,P)-d(F_2,P)=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$</td></tr>
<tr><td>Ecuación reducida
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>Ecuación focal
$(x-c)^2+y^2-\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Foco: (c,0), directriz: $x=\frac{a^2}{c}$ y $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $y\ c>a \Rightarrow \varepsilon>1$</td></tr>
</table>

Parábola



<table>
<tr><td colspan="2">Siendo p>0 el parámetro de la parábola, $F(\frac{p}{2},0)$, y directriz $x=-\frac{p}{2}$:
$d(P,d)=d(F,P) \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>Ecuación reducida
$y^2=2px\ horizontal$
$x^2=2py\ vertical$</td><td>Ecuación focal
$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2-\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varepsilon=1$</td></tr>
</table>

Matriz asociada a una cónica

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & C/2 \\ E/2 & C/2 & B \end{pmatrix}$$

Polar de un punto respecto a una cónica

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & C/2 \\ E/2 & C/2 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

- Si P es punto de la cónica: la polar es tangente.
- Si P no pertenece a la cónica y es exterior: la polar interseca y pasa por los puntos de tangencia.
- Si P no pertenece a la cónica y es interior: la polar no interseca.

Clasificación de una cónica

$$|A| = \begin{vmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & C/2 \\ E/2 & C/2 & B \end{vmatrix}$$

Parte cuadrática:

$$A_{00} = \begin{vmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{vmatrix}$$

Traza: $tr(A_{00}) = A + B$

	$\lvert A\rvert = 0$ Degeneradas	$\lvert A\rvert \neq 0$ No degeneradas
TIPO ELÍPTICO $A_{00} > 0$	Rectas imaginarias secantes: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Elipse imaginaria: $signo\ tr(A_{00}) = signo\lvert A\rvert$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ Elipse real: $signo\ tr(A_{00}) \neq signo\lvert A\rvert$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
TIPO PARABÓLICO $A_{00} = 0$	Rectas paralelas: $y^2 = a$	Parábola: $y^2 = 2px$
TIPO HIPERBÓLICO $A_{00} < 0$	Rectas reales secantes: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Hipérbola (equilátera si A+B=0): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Haces de cónicas

Haz de cónicas que pasan por 4 puntos

$$C_1 \equiv r_{AB} \cdot r_{CD}, C_2 \equiv r_{AC} \cdot r_{BD}, C_3 \equiv r_{AD} \cdot r_{BC}$$

$$C_1 + \lambda C_2, C_2 + \lambda C_3, C_1 + \lambda C_3$$

Haz de cónicas tangentes a dos rectas en dos puntos

$$C_1 \equiv (r_{AB})^2, C_1 \equiv t_A \cdot t_B \Rightarrow C_1 + \lambda C_2$$

Haz de cónicas tangentes a una recta en un punto y que pasa por dos puntos conocidos

Sea s la recta tangente, C el punto de tangencia y A y B los otros dos puntos: $C_1 \equiv r_{AC} \cdot r_{BC}, C_2 \equiv r_{AB} \cdot s \Longrightarrow C_1 + \lambda C_2$

Elementos notables de una cónica. Cónicas con centro

Centro: derivando la reducida

$$\begin{cases} D/2 + Ax + C/2\, y = 0 \\ E/2 + C/2\, x + By = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ó}} \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

Ecuación reducida: λ_1 y λ_2 autovalores de la parte cuadrática

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} |A| = k \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ A_{00} = \cdot\, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{|A|}{A_{00}} \Longrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{|A|}{A_{00}} = 0$$

Ejes

Vectores directores los autovectores.

$$\lambda_1 \rightarrow eje\ X\ y\ \lambda_2 \rightarrow eje\ Y$$

Eje focal

Recta correspondiente al autovector λ_1.

Diámetros conjugados: p y q pendientes

$$\begin{pmatrix} 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} = 0$$

Asíntotas de hipérbola: m pendiente

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Si solo una sol.: la otra paralela eje Y.

Vértices: $\vec{u}$ vector unitario en dirección a eje focal.

$$V = Centro \pm a\vec{u}$$

Focos

$$F = Centro \pm c\vec{u}$$

Directrices

Polares de los focos.

Elementos notables de una cónica. Cónicas sin centro

Ecuación reducida: λ_1 y λ_2 autovalores de la parte cuadrática

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_2}{2} & 0 \\ \frac{\lambda_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |A|=\frac{-\lambda_1\cdot{\lambda_2}^2}{4} \\ |A_{00}|=0 \\ Tr(A_{00})=\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 y^2+\lambda_2 x=0 \Rightarrow p=\frac{-\lambda_2}{2\lambda_1}$$

Eje

$$(\mathbf{1} \quad v_1 \quad v_2)\begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & C/2 \\ E/2 & C/2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

Alternativa:

$$A\frac{df}{dx}+\frac{C}{2}\frac{df}{dy}=0$$

, donde (v_1, v_2) es el autovector del autovalor no nulo de A_{00}.

Vértice	***Foco:*** $\vec{u}$ vector unitario del eje.	***Directriz***
Intersección con el eje.	$F=Vértice\pm\frac{p}{2}\vec{u}$	Polar del foco.

TRUCOS

- Volumen con integrales: $V=\pi\int_a^b[f(x)]^2$.
- Área elipse: $A=\pi ab$.
- Las hipérbolas equiláteras son las que tienen los semiejes iguales.
- ECUACIÓN GENERAL DE LA FAMILIA DE LAS HIPÉRBOLAS EQUILÁTERAS:

  $ax^2-ay^2+bxy+cx+dy+e=0$