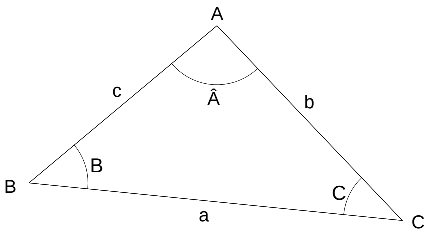
Tania Fernández Serna

El triángulo: rectas y puntos notables



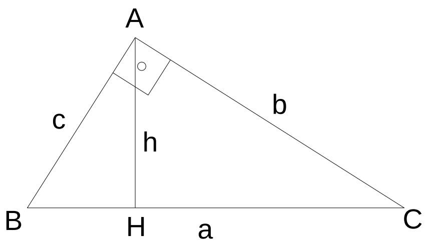
Circuncentro (O)	Mediatrices	Ortocentro (H)	Alturas
Incentro (I)	Bisectrices	Baricentro (G)	Medianas
Dividen al lado opuesto en dos segmentos de longitud proporcional a la longitud de sus lados adyacentes. (Teorema de la bisectriz).		• *El segmento de cada mediana entre su pie y el baricentro es 1/3 de ella misma.* • *Cada mediana divide al triángulo en dos de igual área. Tres, lo dividen en 6 triángulos de misma área.*	

Recta de Euler: El baricentro G está alineado con el ortocentro H y con el circuncentro O, siendo GH el doble que GO.

Semiperímetro: $\boxed{\rho = \dfrac{a+b+c}{2}}$

Si los ángulos están en progresión aritmética, al menos uno de ellos medirá 60º.

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo



ÁNGULOS	$\hat{B}+\hat{C}=\dfrac{\pi}{2} \parallel sen\hat{B}=\cos\hat{C}=\dfrac{b}{a} \parallel sen\hat{C}=\cos\hat{B}=\dfrac{c}{a}$
T. ALTURA	$h^2=\overline{HC}\cdot\overline{HB}$ (media geométrica)
T. CATETO	$b^2=a\cdot\overline{HC} \parallel c^2=a\cdot\overline{HB}$
T. PITÁGORAS	$a^2=b^2+c^2$
SUPERFICIE	$S=\dfrac{bc}{2}=\dfrac{ah}{2} \Leftrightarrow h=\dfrac{bc}{a}$

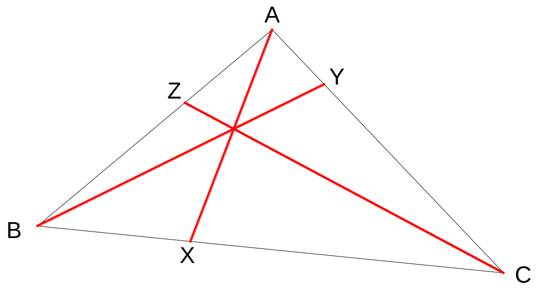
Relaciones de los triángulos oblicuoángulos

Cuadrado de un lado: acutángulo	$a^2=b^2+c^2-2b\overline{AH_b}$	**Cuadrado de un lado: obtusángulo**	$a^2=b^2+c^2+2b\overline{AH_b}$
ÁNGULOS	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$	**DESIGUALDAD**	$a<b+c\,/\,b<a+c\,/\,c<a+b$
T. BISECTRIZ	Siendo V_a pie de bisectriz v_a : $\dfrac{\overline{V_aB}}{\overline{V_aC}}=\dfrac{b}{c}$	**T. COSENO**	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
T. SENO	Siendo R = radio de la circunscrita: $\dfrac{a}{sen\hat{A}}=\dfrac{b}{sen\hat{B}}=\dfrac{c}{sen\hat{C}}=2R$	**T. TANGENTE**	Siendo a ≠ b: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\tan\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{\tan\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$
Expresión de las bisectrices	$v_a=\sqrt{bc\left[1-\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\right]}=\dfrac{2\sqrt{bc\rho(\rho-a)}}{b+c}$	**Expresión de las medianas**	$m_a=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$
Expresión de las alturas	$h_a=\dfrac{2\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}}{a}$	**Radio inscrita (r)**	$r=\sqrt{\dfrac{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}{\rho}}$
Radio circunscrita (R)	$R=\dfrac{abc}{4\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}}$	**Área triángulo [1]**	$S=\dfrac{ah_a}{2}=\dfrac{absen\hat{C}}{2}=\dfrac{a^2sen\hat{B}sen\hat{C}}{2sen(\hat{B}+\hat{C})}$ $sen(\hat{B}+\hat{C})=sen\hat{A} \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{C}=\pi-\hat{A}$
Área triángulo [2]	$S=\dfrac{abc}{4R}=2R^2sen\hat{A}sen\hat{B}sen\hat{C}=r\rho$	**F. Herón**	$S=\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}$
F. Briggs [1]	$sen\hat{A}=\sqrt{\dfrac{(\rho-b)(\rho-c)}{bc}}$	**F. Briggs [2]**	$\cos\hat{A}=\sqrt{\dfrac{\rho(\rho-a)}{bc}}$

Teoremas de Ceva y Menelao

El segmento que une un vértice de un triángulo con cualquier punto del lado, se llama **ceviana**.

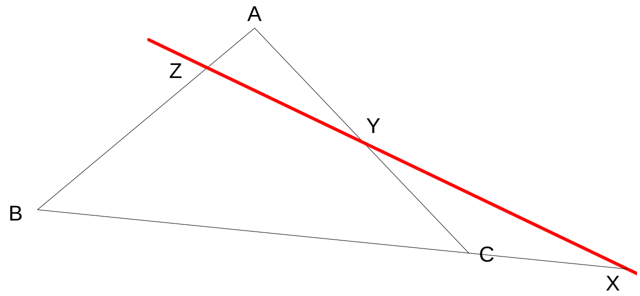
Teorema de Ceva



Tres cevianas AX, BY, CZ son concurrentes si y sólo si:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=1$$

Teorema de Menelao



Tres puntos X, Y, Z están alineados si y sólo si:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=-1$$

Fórmula de Moivre

Cuando hemos de resolver un problema en el que tenemos polinomios y razones trigonométricas, con el objetivo de buscar las raíces de los primeros, recurriremos a la fórmula de Moivre.

$\boxed{(\cos\alpha + i sen\alpha)^n = \cos n\alpha + i sen n\alpha}$ Igualaremos, así, la parte real a la solución real del polinomio.

Fórmulas útiles

Distancia de punto $P(p_1,p_2)$a recta $r \coloneqq ax+by+c=0$: $d(P,r)=\frac{|a\cdot p_1+b\cdot p_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

TRUCOS

- En problemas de identidades trigonométricas, seguiremos tres técnicas:

  - Intentar tener siempre la misma razón.
  - Intentar tener siempre el mismo argumento.
  - Factorizar.

- Elegir sistemas de coordenadas que nos faciliten el problema o, incluso, recurrir a coordenadas polares.
- Cuando tenemos números naturales (las distancias no pueden ser negativas) y raíces, operamos mejor con los cuadrados.
- Podemos buscar semejanzas con otras figuras. Podemos tener un triángulo, pero emplear, por ejemplo, la figura de un trapecio, utilizando que la paralela media de éstos es un medio de la suma de sus lados paralelos.

Teorema de Routh

$$\frac{AB'}{CB'}=r \qquad \frac{BA'}{CA'}=s \qquad \frac{AC'}{BC'}=t$$

$$A=\frac{(rst-1)^2}{(st+s+1)(rt+t+1)(rs+r+1)}$$