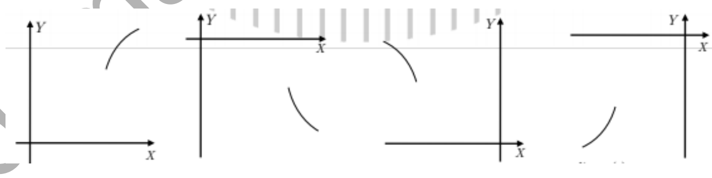
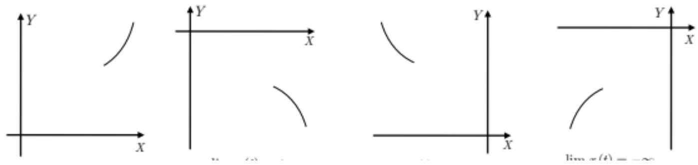
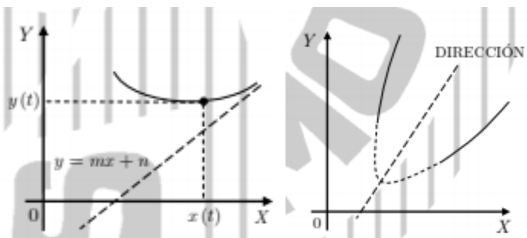
Curvas en paramétricas

Una curva de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto imagen $\mathcal{C} = \gamma(I)$ de cualquier función continua (camino) $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice entonces que el camino γ recorre la curva $\mathcal{C}$ o que γ es una parametrización de $\mathcal{C}$. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Propiedades de una curva

Periodicidad	$\exists p > 0 \mid \gamma(t+p) = \gamma(t)$
Simetría	Respecto eje OX: $\big(x(s), y(s)\big) = (x(t), -y(t))$
	Respecto eje OY: $\big(x(s), y(s)\big) = (-x(t), y(t))$
	Respecto origen: $\big(x(s), y(s)\big) = (-x(t), -y(t))$
	Respecto recta y=x: $\big(x(s), y(s)\big) = (y(t), x(t))$
	Respecto recta y=-x: $\big(x(s), y(s)\big) = (-y(t), -x(t))$
Asíntotas	***Asíntota vertical*** $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ ***Asíntota horizontal*** $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$ La posición de la curva respecto de la asíntota la deciden los límites laterales de x(t) e y(t). ***Asíntotas oblicuas o ramas parabólicas*** $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ $\quad m = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)}$ $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ **<u>Rama parabólica según eje OX</u>**: m=0 Posición en función de los signos de los infinitos en cada límite x(t) e y(t).  **<u>Rama parabólica según eje OY</u>**: $m = \pm\infty$ Posición en función de los signos de los infinitos en cada límite x(t) e y(t).  **<u>Asíntota oblicua</u>**: $m \in \mathbb{R}, m \neq 0$ $n = \lim_{t\to t_0} [y(t) - m \cdot x(t)]$ • Si n$\in \mathbb{R}$, <u>asíntota oblicua</u> y=mx+n. La posición se averigua estudiando el signo de la diferencia: $y(t) - [m \cdot x(t) + n]$. • Si $n = \pm\infty$, <u>rama parabólica de pendiente m</u>. 

Puntos regulares y singulares.

Punto regular (ordinario) $\boldsymbol{P = \gamma(t_0)}$

$\gamma'(t_0) \neq 0 \Longrightarrow x'(t_0) \neq 0 \ y \ y'(t_0) \neq 0$

Vector tangente:

$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$

Recta tangente: vector + punto P

Para decidir la posición de la curva respecto de la tangente: Primer vector $\gamma^{n)}(t_0), n \geq 2$ cuya dirección sea distinta a los anteriores.

Si n par: en el entorno de P hacia el que apunta el vector.

Si n impar: P punto de inflexión; la curva atraviesa.

Punto singular $\boldsymbol{P = \gamma(t_0)}$

$\gamma'(t_0) = 0 \Longrightarrow x'(t_0) = y'(t_0) = 0$

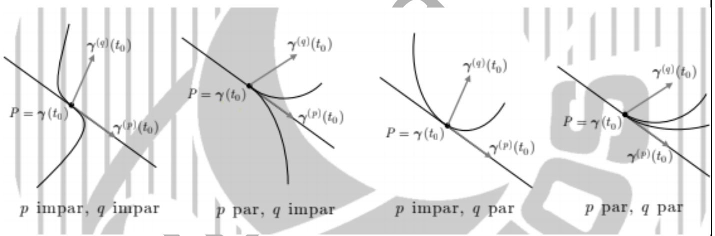
Vector tang.: $\gamma^{p)}(t_0) = (x^{p)}(t_0), y^{p)}(t_0))$

$$\gamma'(t_0) = \gamma''(t_0) = \cdots = \gamma^{p-1)}(t_0) = 0$$

$$\gamma^{p)}(t_0) \neq 0$$

Para decidir la posición de la curva respecto de la tangente: Primer vector $\gamma^{q)}(t_0) \neq 0$ cuya dirección sea distinta a los anteriores entre p y q.

- Si p y q impares, P punto de inflexión.
- Si p par y q impar, P punto de retroceso de 1ª especie.
- Si p impar y q par, P punto ordinario de la curva.
- Si p y q pares, P punto de retroceso de 2ª especie.



Tangentes horizontales y verticales

Tangente horizontal: $x'(t_0) \neq 0 \ y \ y'(t_0) = 0$

Tangente vertical: $x'(t_0) = 0 \ y \ y'(t_0) \neq 0$

A los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a alguno de los dos ejes coordenados se les suele llamar puntos críticos de la curva.

Cuadro de variaciones

t	De $-\infty$ $a + \infty$ incluyendo los puntos críticos y en los que no existe.
$(x'(t), y'(t))$	(signo, signo) en intervalos.
$(x(t), y(t))$	Valores.

Concavidad y convexidad

Puede estudiarse en aquellos intervalos en los que la función es dos veces derivable.

$$y''(x) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{x'(t)^3}$$

Y estudiamos el signo de $y''(x)$.

Puntos dobles

$$\big(x(t), y(t)\big) = (x(s), y(s))$$

Gráfica de una curva

Además de todos los puntos anteriores, podemos calcular puntos complementarios de la curva tales como sus intersecciones con los ejes de coordenadas o sus intersecciones con las asíntotas que pudiera tener la curva.

TRUCOS

- Parametrizar curvas que nos den previamente.