Tania Fernández Serna

Partición de un intervalo

Una partición P del intervalo cerrado [a, b] es un conjunto finito de puntos P = { x_0, x_1, x_2, ..., x_n} tal que: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$	La diferencia máxima entre cualesquiera dos puntos consecutivos de la partición, se llama norma de la partición, y se denota por $\|P\|$, es decir: $\| P \| = \max \{x_j - x_{j-1} , j = 1 ... n\}$

Un refinamiento de la partición P es otra partición P' que contiene todos los puntos de P y además otros puntos adicionales.

Suma de Riemann superior e inferior

Sea P = { x_0, x_1, x_2, ..., x_n} una partición del intervalo cerrado [a, b] y *f* una función acotada definida en ese intervalo. Entonces:

La suma superior de f respecto de la partición P se define así: $S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} c_j\ (x_j - x_{j-1})$, donde c_j es el supremo de f(x) en el intervalo [x_{j-1}, x_j].	La suma inferior de f respecto de la partición P se define así: $I(f, P) = \sum_{j=1}^{n} d_j\ (x_j - x_{j-1})$, donde d_j es el ínfimo de f(x) en el intervalo [x_{j-1}, x_j].

Integral de Riemann superior e inferior. Funciones Riemann-Integrables

Sea f una función acotada definida en un intervalo cerrado [a, b]. Se define:

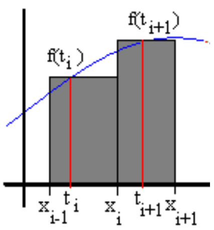
- la integral superior $\overline{\int_a^b} f$=inf{S(f, P): P es partición de [a, b]}= $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$
- la integral inferior $\underline{\int_a^b} f$=sup{I(f, P): P es partición de [a, b]}= $\lim_{n\to\infty} I(f, P_n)$

Entonces si $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} [S(f, P_n) - I(f, P_n)]$ la función *f es Riemann-Integrable* y la integral de Riemann de f sobre el intervalo [a, b] se denota por: $\int_a^b f\ (x)dx$.

Caracterización de las funciones Riemann-Integrables

Supongamos que f es una función acotada definida en el intervalo cerrado [a, b]. Entonces f es integrable Riemann si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe al menos una partición P tal que: $|S(f, P) - I(f, P)| < \varepsilon$.

Sumas de Riemann



Si P = { x_0, x_1, x_2, ..., x_n} es una partición del intervalo cerrado [a, b] y *f* es una función definida en ese intervalo, entonces la Suma de Riemann de *f* respecto de la partición P se define como: $\sigma(f, P_n, C_n) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\ (x_j - x_{j-1})$, donde t_j es un número arbitrario en el intervalo [x_{j-1}, x_j] y C_n son los puntos intermedios. La suma de Riemann corresponde geométricamente con la suma de las áreas de los rectángulos con base $x_j - x_{j-1}$ y altura $f(t_j)$.

Teorema de la media

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

Funciones Riemann-Integrables

- *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.*
- *Toda función continua y acotada en un intervalo cerrado y acotado, excepto en una cantidad numerable de puntos, es Riemann-Integrable. Recíprocamente, si una función acotada definida en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable, entonces es continua en ese intervalo excepto como mucho en una cantidad numerable de puntos.*
- *Toda función monótona y acotada en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.*

Integral de Riemann de funciones no positivas

Dada una función real no positiva definida en el intervalo [a,b], se puede descomponer en dos funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$ definidas así:

$f^+(x) = \max \{f(x), 0\}$ $\qquad$ $f^-(x) = \max \{-f(x), 0\}$

Así, tenemos que ambas funciones son positivas y f se puede definir en base a ellas de esta manera: f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x).

Así que el problema se reduce a calcular la integral de dos funciones positivas. $\int_a^b f$(x) dx = $\int_a^b f^{+}$(x) dx - $\int_a^b f^{-}$(x) dx

Propiedades

Sean f, g funciones integrables Riemann definidas en el intervalo [a, b].

1. Propiedades de linealidad: $\int_a^b f$ (x) dx $= -\int_a^b f$ (x) dx Si c es un número real, entonces c·f(x) es integrable en [a, b], y se cumple: $\int_a^b c \cdot f$ (x) dx = c $\int_a^b f$ (x) dx La función (f + g) (x) es integrable en [a, b], y se cumple: $\int_a^b [\mathrm{f(x)} + \mathrm{g(x)}]\,\mathrm{dx}$ = $\int_a^b f$ (x) dx + $\int_a^b g$ (x) dx	*2. Propiedad de aditividad respecto del intervalo:* Si a < c < b entonces $\int_a^b f$ (x) dx = $\int_a^c f$ (x) dx + $\int_c^b f$ (x) dx *3. Propiedades de monotonía:* Se cumple que |f| es integrable y: $\left\|\int_a^b f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx$ Si g es otra función definida en [a, b] tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en [a, b], entonces $\int_a^b g$ (x) dx$\leq \int_a^b f$ (x) dx

Pasos para resolver integrales de Riemann

1. Convertir en suma de Riemann de forma que nos quede una función en la que $x = \frac{1}{n}$.
2. Definir $\sigma(f, \mathrm{P}_n, C_n)$, P_n, C_n.
3. Definir extremos del intervalo [a,b].
4. Calcular $\int_a^b f\,(x)dx$.

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b], se define una nueva función: *F(x)*= $\int_a^b f\,(f)dt$.

Entonces F es continua en [a, b]. Es más, si f es continua en un punto *c* del intervalo (a,b), entonces F es derivable en *c* y $F'(c) = f(c)$.

$$\boxed{\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right]' = f\big(v(x)\big)\cdot v'(x) - f\big(u(x)\big)\cdot u'(x)}$$

Evaluación de la integral. Regla de Barrow

Sea f una función Riemann-Integrable definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b].

Y sea F una primitiva de f en [a, b], es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo x perteneciente a [a, b].

$$\int_a^b f\,(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

TRUCOS

- Realizar cambios hasta tener una función en la suma de Riemann lo más sencilla posible.
- Si la integral parece difícil, intentar llegar a la misma integral y resolver una ecuación.