Teorema de Rolle

Si f es continua en [a,b] y derivable en (a,b) y si f(a)=f(b), entonces existe algún punto c∈(a,b) tal que f'(c)=0.

Inversa local derivable

Sea f I: → R una función definida en un intervalo I y a∈I un punto dado. Si f es de clase $\mathcal{C}^1$ (derivable y con derivada continua) en I y f'(a)≠0, existe un entorno U de a en el que f admite función inversa f^{-1}, que es derivable en cierto entorno V de f(a), siendo, para cada y∈V , $(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Desarrollo limitado de orden n de una función en un punto

Desarrollo limitado de una función en un punto

$$f(x) = p_n(x) + o[(x-a)^n] \ \ (1)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Desarrollo limitado de Taylor

Sea f una función definida en un entorno de un punto a ∈ R . Si f es derivable hasta el orden n en a, entonces f admite desarrollo polinómico limitado de orden n en a (1), se le llama polinomio de Taylor de grado n de f en a:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Algunos desarrollos limitados cuando $x \to 0$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{0} x^n + o(x^n)$$

$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$arcsenx = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2.4.5}x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$argsenhx = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2.4.5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$argtanhx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$tanx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$tanhx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

Fórmula de Taylor

Si f es una función de clase C^n en el intervalo compacto [a,b] y tiene derivada (n+1) -ésima en el intervalo abierto (a,b), entonces existe algún punto c$\in$(a,b) tal que:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Fórmula de Mac-Laurin: (cuando a=0), el resto n-ésimo de la fórmula de Taylor de f en [a,b] es: $r_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Acotación del resto: $|r_n|\leq\frac{(b-a)^{n+1}\cdot k}{(n+1)!}$

Aplicaciones de la derivada a la monotonía y los extremos relativos

f es estrictamente creciente (resp. decreciente) en x_0 si, dado x y x' en un cierto entorno de $x_0$mtales que $x<x_0<x'$ ocurre que $f(x)<f(x_0)<f(x')$ (resp. $f(x)>f(x_0)>f(x')$).

Teorema: Sea f I: → R una función definida en un intervalo I y sea $x_0\in$ I. Si f es derivable en x_0, se cumple que:

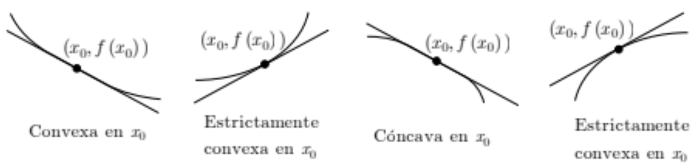
i) Si $f'(x_0)>0$, entonces f es estrictamente creciente en x_0; si $f'(x_0)<0$, f es estrictamente decreciente en x_0. (No siempre recíproco).

ii) Si f es creciente en x_0, entonces $f'(x_0)\geq 0$; si f es decreciente en x_0, $f'(x_0)\leq 0$.

Máximos y mínimos: tenemos un máximo si es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha (resp. mínimo).

Concavidad y convexidad

Se dice que la curva y=f(x) es convexa (respectivamente, cóncava) en x= x_0 si $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (resp. ≤).



Condición suficiente de convexidad (concavidad) estricta

Sea una función dos veces derivable en un intervalo I: si $f''(x_0)>0$, para todo x$\in$I, f es estrictamente convexa; si $f''(x_0)<0$, f es estrictamente cóncava en I.

Punto de inflexión: $f''(x_0)=0$, y se produce un cambio de cóncavo a convexo o viceversa.

Ramas infinitas. Asíntotas

Asíntota vertical: $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ ***y*** $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$$

Para la posición de la curva: $f(x)-l$

$f(x)-l>0$ $f(x)-l<0$ $f(x)-l=0$

por encima por debajo oscilante

Rama parabólica según eje OX

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

Rama parabólica según eje OX

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$$

Asíntota oblicua: y=mx+n

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m, m\neq 0,\pm\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=n\in\mathbb{R}$

Para la posición de la curva: $f(x)-l$

$f(x)-l>0$ $f(x)-l<0$ $f(x)-l=0$

por encima por debajo oscilante

Rama parabólica de pendiente m

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m, m\neq 0,\pm \text{ y } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\pm\infty$$

TRUCOS

- Cuidado con los puntos angulosos.
- No olvidar el valor absoluto en los casos de raíces cuadradas (distinguimos dos casos).