Sucesiones monótonas

- Una sucesión de números reales es monótona creciente si se cumple: $x_{n+1} \geq x_n$; siendo estrictamente creciente si: $x_{n+1} > x_n$
- Una sucesión de reales es monótona decreciente si se cumple: $x_{n+1} \leq x_n$; siendo estrictamente decreciente si: $x_{n+1} < x_n$

Monotonía de la sucesión recurrente $\mathbf{x_{n+1} = f(x_n)}$

i) Si f es monótona en un intervalo de R:

$x_2 > x_1$, la sucesión es estrictamente creciente.

$x_2 < x_1$, la sucesión es estrictamente decreciente.

$x_2 = x_1$, la sucesión es constante.

ii) Si f no es estrictamente monótona:

× La subsucesión x_{2n-1}/x_{2n} de los términos de lugar impar/par es:

- estrictamente creciente si $x_3 > x_1 \,/\, x_2 > x_1$
- estrictamente decreciente si $x_3 > x_1 \,/\, x_2 > x_1$
- constante si $x_3 = x_1 \,/\, x_2 = x_1$

Sucesiones acotadas

- Una sucesión de números reales está acotada superiormente si existe un $k \in R$ tal que $x_n < k$, para todo $n \in N$
- Una sucesión de números reales está acotada inferiormente si existe un $k \in R$ tal que $x_n > k$, para todo $n \in N$
- Una sucesión de números reales es acotada si existe un $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo $n \in N$

Sucesiones convergentes

DEFINICIÓN

Se dice que una sucesión (x_n) de números reales tiene límite $l \in R$ si:

- i. Para todo $\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in R,$ se cumple que $|x_n - l| < \varepsilon$.
- ii. Fuera de cualquier entorno de l hay un número finito de términos de la sucesión (x_n).
- iii. Se escribe: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l,\ \lim x_n = l,\ x_n \to l$.

PROPIEDADES

- i. Si (x_n) es convergente, (x_n) tiene un solo límite.
- ii. Si (x_n) es convergente, (x_n) está acotada.
- iii. Si (x_n) converge hacia $l \in R$, toda subsucesión de (x_n) converge también hacia $l \in R$.
- iv. COMPLETITUD: Si (x_n) es una sucesión real creciente/decreciente y acotada superior o inferiormente, entonces (x_n) es convergente.

Sucesiones divergentes

DEFINICIÓN

Se dice que una sucesión (x_n) de números reales tiene límite $+\infty / -\infty$ si:

- i. Para todo $k > 0,\ \mathrm{k} \in R,$ se cumple que $x_n > k \,/\, x_n < -k$
- ii. Se escribe: $\lim x_n = +\infty / \lim x_n = -\infty$.

PROPIEDADES

- i. Si (x_n) es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces tiene límite $+\infty$.
- ii. Si (x_n) es una sucesión decreciente y no acotada inferiormente, entonces tiene límite $-\infty$.

Sucesiones de Cauchy

Se dice que la sucesión (x_n) de números reales es una sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in R,$ existe un índice $v \in N$ tal que, para cualesquiera que sean los índices, $p \geq v$ y $q \geq v$, se cumple que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Regla del Sándwich

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes de números reales y sea k un número real:

Si $\lim(a_n) > k$, entonces $(a_n) > k$ a partir de cierto término (apct).

Si $(a_n) \geq k$ a partir de cierto término, entonces $\lim(a_n) \geq k$.

Si $\lim(a_n) < \lim(b_n)$, entonces $(a_n) < (b_n)$ a partir de cierto término.

Si $(a_n) \leq (b_n)$ a partir de cierto término, entonces $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$.

Si $\lim(a_n) = \lim(b_n) = l \in R$ y (c_n) es una sucesión tal que $(a_n) \leq (c_n) \leq (b_n)$ a partir de cierto término, entonces (c_n) es convergente y $\lim(c_n) = l$.

Propiedades de los infinitos

Una sucesión $a_n \subset R$ es un infinito si es divergente ($a_n \to \pm\infty$).

I. Si $a_n \to \pm\infty$ y $b_n \geq a_n$ apct, entonces $b_n \to \pm\infty$.

II. $a_n \to \pm\infty \Leftrightarrow 1/a_n \to 0^{\pm}$.

III. $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
En el producto, el signo se determina a partir de la regla elemental de signos.

IV. La suma de un infinito y una sucesión acotada es otro infinito:
$a_n + b_n \to +\infty \Leftrightarrow a_n \to +\infty$ y b_n acotada inf.
$a_n + b_n \to -\infty \Leftrightarrow a_n \to -\infty$ y b_n acotada sup.

Órdenes de los infinitos

Dadas dos sucesiones de números reales, ambas infinitos, son comparables si existe: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_b} = l$

Órdenes infinitos fundamentales si $x_n \to +\infty$ y $p > 0, q > 0, r > 1, t > 0$: $\boxed{(Lx_n)^p << (x_n)^p << r^{x_n} << (x_n)^{tx_n}}$

I. $l = 0 \Leftrightarrow a_n$ es un infinito de menor orden que b_n, es decir, $a_n << b_n$ ó $a_n = o(b_n)$ (Notación de Landau).

II. $l = \pm\infty / \lim\limits_{n\to\infty}(b_n/a_n) = 0 \Leftrightarrow a_n$ es un infinito de mayor orden que b_n, es decir, $a_n >> b_n$.

$l \neq 0$ y $l \neq \pm\infty \Leftrightarrow a_n$ y b_n son infinitos del mismo orden, es decir, $a_n <> b_n$.

III. Cuando a_n es del mismo orden que el infinito potencial n^k, con $k > 0$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k} = l,\ l \neq 0$ y $l \neq \pm\infty$, k es el orden del infinito a_n y $l \cdot n^k$ es su parte principal.

Infinitésimos

I. Una sucesión $a_n \subset R$ es infinitésimo si converge a 0.

II. Una sucesión $a_n \subset R$ converge a un número real $l \Leftrightarrow (a_n - l)$ es un infinitésimo.

III. La suma de dos infinitésimos es otro infinitésimo.

IV. ***Propiedad fundamental***: El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es otro infinitésimo:
$x_n \to 0$ e y_n es acotada $\Rightarrow x_n y_n \to 0$

Mismos **órdenes** que los infinitos excepto el punto III:

$l \neq 0$ y $l \neq \pm\infty \Leftrightarrow a_n$ y b_n son infinitésimos del mismo orden, es decir, $a_n <> b_n$.

Cuando a_n es del mismo orden que el infinitésimo $1/n^k$, con $k > 0$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^k} = l,\ l \neq 0$ y $l \neq \pm\infty$, k es el orden del infinitésimo a_n y l/n^k es su parte principal.

Infinitos e infinitésimos equivalentes

(a_n) y (b_n) son equivalentes, $(a_n) \approx (b_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. | $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k} = l \to a_n \approx ln^k$ | $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^k} = l \to a_n \approx 1/n^k$

- Si $\varepsilon_n \to 0$:

$sen\varepsilon_n \approx \varepsilon_n$	$\tan\varepsilon_n \approx \varepsilon_n$	$arcsen\varepsilon_n \approx \varepsilon_n$	$\arctan\varepsilon_n \approx \varepsilon_n$
$1 - \cos\varepsilon_n \approx 1/2\,\varepsilon_n^2$	$(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \approx \alpha\varepsilon_n, \alpha \neq 0$	$e^{\varepsilon_n} - 1 \approx \varepsilon_n$	$a^{\varepsilon_n} - 1 \approx \varepsilon_n \mathrm{L} a, a > 0, a \neq 1$
$L(1+\varepsilon_n) \approx \varepsilon_n$	$\log_a(1+\varepsilon_n) \approx \varepsilon_n / La, a > 0, a \neq 1$		

- Si $n \to \infty$:

$a_k n^k + \ldots + a_1 x + a_0 \approx a_k n^k, a_k \neq 0$	$L(a_k n^k + \ldots + a_1 x + a_0) \approx Ln^k, a_k > 0$	
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \approx Ln$	***Fórmula de Stirling***: $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$	$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$

- Si $a_n \to a, a \neq 0 \to a_n \approx a$

- Otras equivalencias:

$Lu_n \approx u_n - 1$ si $u_n \to 1$	$\log_a u_n \approx \frac{u_n - 1}{La}$ si $u_n \to 1$	$(u_n)^\alpha - 1 \approx \alpha(u_n - 1)$ si $u_n \to 1$
$\sqrt[n]{n!} \approx n/e$	$L(n!) \approx nLn$	$\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n} \to e$ si $\varepsilon_n \to \infty$

Límites indeterminados

$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0\cdot\infty$	Aplicación de equivalencias, de acuerdo al **Principio de Sustitución**.
$+\infty - \infty$	i. $a_n >> b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = +\infty\cdot+\infty = +\infty$ ii. $a_n << b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = +\infty\cdot-1 = -\infty$ iii. $a_n <> b_n, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = l \in (0,+\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = +\infty\cdot(l-1) = \begin{Bmatrix} +\infty & \text{si } l>1 \\ -\infty & \text{si } l<1 \end{Bmatrix}$
$0^0, (+\infty)^0, 1^{\pm\infty}$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = e^\lambda$, donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} b_n La_n$, que será un límite del tipo $0\cdot\infty$ En el caso $a_n^{\,b_n} \to 1^{\pm\infty}$, como $a_n \to 1 \Rightarrow La_n \approx a_n - 1$, luego, siempre que exista, será: $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n\text{-}1)$

Principio de sustitución

Si $(a_n) \approx (b_n)$ y (x_n) es una sucesión cualquiera $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n a_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n b_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{b_n}$.

1. $A_n = x_n a_n$, podemos sustituir a_n por un equivalente b_n, quedando: $B_n = x_n b_n$ Si el límite de la expresión equivalente no existe, no es de aplicación este principio.
2. Esta sustitución será ilícita, en general, cuando a_n no sea factor o divisor de A_n.

Regla de Stolz

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones $\in R$, tales que (b_n) es estrictamente monótona y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$:

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_1}$, siempre que exista el límite del segundo miembro.

Regla de la raíz

Sea $(a_n) \in R^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$, siempre que exista el límite del segundo miembro.

Regla de L´Hôpital (extra)

Sean f y g dos funciones continuas definidas en el intervalo [a,b], derivables en (a,b) y sea c perteneciente a (a,b) tal que f(c)=g(c)=0 y g'(x)≠0 si x≠c: Si existe el límite L de f'/g' en c, entonces existe el límite de f/g (en c) y es igual a L. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Velocidades de infinitos

- Una función exponencial siempre crece más rápido que una función polinomial.
- La suma de dos funciones f + g crece igual de rápido que la que crece más rápido entre f y g.
- Toda función f crece igual de rápido que la misma función multiplicada por una constante.
- Si n > m entonces x^n crece más rápido que x^m.

- De lo anterior, un polinomio crece igual de rápido que su monomio de mayor grado.
- Toda función lineal crece más rápido que las funciones logarítmicas.
- Toda función logarítmica crece más rápido que las funciones constantes.

Teorema del valor medio

Dada cualquier función f continua en el intervalo [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos (b, f(b)) y (a, f(a)).

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

TRUCOS

- Plantear hipótesis inductivas para dar arranque a algunos problemas.
- Cuando tenemos multiplicaciones y raíces, pensamos en logaritmos.