Tania Fernández Serna

El cuerpo de los números complejos

(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d) (a,b)·(c,d)=(ac − bd, ad + bc) $z^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$

El conjugado, módulo y argumento de un número comlpejo

Si z=a+bi∈ℂ se define el **conjugado** de z como $\bar{z}=a-bi\in\mathbb{C}$. $\begin{cases} i) & \overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w} \\ ii) & \overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w} \\ iii) & z\neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}} \\ iv) & \bar{\bar{z}}=z \end{cases}$ $z+\bar{z}=2Re(z)$	**Módulo**: $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ 1. El único complejo de módulo nulo es 0∈ℂ. 2. El módulo del producto de dos números complejos coincide con el producto de sus módulos. 3. Para cada z∈ℂ, se cumplen las desigualdades |Re(z)|≤|z| y |Im(z)|≤|z|. 4. (Desigualdad triangular): Dados z,v∈ℂ, |z+v|≤|z|+|v|. 5. Dados z,v∈ℂ, se cumple que ||z|+|v||≤|z-v|.

Llamaremos **argumento** principal de z, y lo denotaremos por arg(z), al único elemento de Argz que cumple la condición −π<arg(z)≤π . Se puede demostrar que si z∈ℂ*:

$$\arg(z)\begin{cases} z\in R^2\to\pi \\ z\in C^*\setminus R\to 2arctg\dfrac{\operatorname{Im} z}{\lvert z\rvert+\operatorname{Re} z}\end{cases}$$

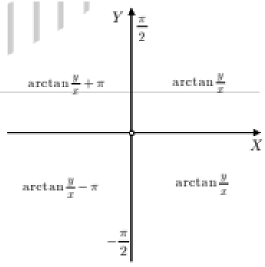
Sea z=a+bi: a=|z|cosθ y b=|z|senθ, luego:

$\boldsymbol{z=|z|(cos\theta+isen\theta)=\rho e^{i\theta}}$.

Esta expresión recibe el nombre de expresión trigonométrica y exponencial.

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ $cos\theta=\dfrac{a}{\rho}$ $sen\theta=\dfrac{a}{\rho}$

$$\operatorname{Arg}(z)=\operatorname{Arg}(x+iy)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}-\pi & \text{si } x<0,\ y<0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{si } x<0,\ y\geq 0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x=0,\ y<0\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=0,\ y>0\\ \arctan\frac{y}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$$



Potencias de números complejos

i. $(\rho_\theta)^n=(\rho^n)_{n\theta}$, es decir, $|z^n|=|z|^n$ y $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

ii. En particular, para θ∈ℝ y n∈ℤ se cumple la **fórmula de Moivre**: $(\cos\theta+\mathrm{isen}\,\theta)^n=\cos n\theta+isenn\theta$.

Raíces n-ésimas de un número complejo

$$r=\sqrt[n]{\rho}>0,\varphi_k=\frac{\theta+2k\pi}{n}\text{ para } k=0,1,\dots,n-1$$

$z\in\mathbb{C}$ es raíz n-ésima de 1 si $z^n=1$. Las raíces n-ésimas de la unidad son: $1,\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\dots,\zeta^{n-1}\ donde\ \zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Todas las raíces son conjugadas dos a dos: $\zeta^{n-1}=\bar{\zeta},\zeta^{n-2}=\overline{\zeta^2},\dots,\zeta^{n-k}=\overline{\zeta^k}$.

Además, si z es raíz n-ésima de la unidad distinta de 1, entonces, tenemos:

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0\Longrightarrow 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{z^{n-1}\cdot z-1}{z-1}=\frac{z^n-1}{z-1}$$

NOTA: $e^{ix}=e^{iy}\Leftrightarrow x-y=2k\pi$

Exponencial y logaritmo de un número complejo

$e^z=e^{a+bi}=e^a(cosb+isenb)$	$e^{z+w}=e^z+e^w$ $e^z\neq 0$	$\lvert e^z\rvert=e^{Rez}$ $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$	$e^z=e^w\Longrightarrow z=w+2k\pi i$ $e^x=\exp(x)$
$\log(\rho e^{i\theta})=L\rho+(\theta+2k\pi)i$	$logz=logz+2k\pi i$	$Logx=Lx$	$e^{Logz}=z$

Seno, coseno y tangente de un número complejo

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad tanz = \frac{senz}{cosz}$$

$$coshz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad senhz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad tanhz = \frac{senhz}{coshz}$$

Aplicaciones geométricas

Traslación: Sea a∈ℂ. La aplicación: $\begin{array}{l} t_a : C \to C \\ z \mapsto z + a \end{array}$ es una biyección de ℂ en ℂ denominada traslación definida por el complejo a.

Giro: La transformación: $\begin{array}{l} \mathrm{f} : C \to C \\ z \mapsto c + (z - c)a \end{array}$ donde $a=e^{\alpha i}$ es un número complejo de módulo 1 y c∈ℂ (ambos prefijados previamente), recibe el nombre de **giro de centro C (afijo de c) y ángulo α**.

Homotecia: Fijado el número real r∈ℝ*, y c=α+βi la transformación: $\begin{array}{l} h_r(c) : C \to C \\ z \mapsto c + r(z - c) \end{array}$ es una biyección denominada **homotecia de centro c y razón r**.

Inversión: Sea r∈ℝ* y z_0∈ℂ. La aplicación ℂ-{z_0} en sí mismo tal que: $z \mapsto z' = z_0 + \frac{r}{\overline{z - z_0}}$ es la **inversión de polo z_0 y potencia r**. En efecto, si en la fracción que aparece en la expresión de z' multiplicamos y dividimos por $z-z_0 \neq 0$, puede escribirse:

$$z' = z_0 + \frac{r}{\overline{z - z_0}} = z_0 + \frac{r}{|z - z_0|^2}(z - z_0), \text{ es decir, } z' - z_0 = \frac{r}{|z - z_0|^2}(z - z_0)$$

La transformación de Tschirnhaus

Dada a ecuación: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ y el cambio de variable:

$\begin{cases} t = x + \frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} \\ t = x - g \end{cases} \Longrightarrow g = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n}$, obteniendo: $b_n t^n + b_{n-2}t^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0, b_n \neq 0$.

La ecuación cúbica

La ecuación cúbica incompleta: $x^3 + \mathrm{m}x + \mathrm{n} = 0 \Longrightarrow \Delta = \left(\frac{m}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\Delta}}$, donde deben elegirse como 1er y 2o sumando las raíces cúbicas respectivas de $-\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta}$ y $-\frac{n}{2} - \sqrt{\Delta}$ cuyo producto sea $-\frac{m}{3}$.

Número de soluciones de la ecuación cúbica incompleta de coeficientes reales

i) Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene tres soluciones reales y distintas.

ii) Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene tres soluciones reales, una doble y otra simple, salvo que sean m=n=0 , en cuyo caso tiene la solución real triple x=0 .

iii) Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene una solución real y dos complejas conjugadas no reales.

Otros resultados

Dados dos polinomios: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ con $a_n, a_0 \neq 0$.

Comprobamos que si $r \in \mathbb{Q}$ es raíz de P(x) ⟺ $\frac{1}{r}$ es raíz de Q(x).