Series de potencias Radio e intervalo de convergencia

$f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = a_n x^n$, la serie funcional es: $\sum f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$

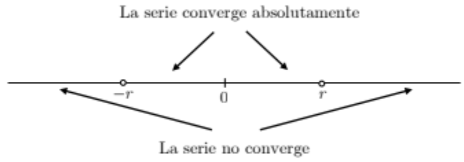
Teorema de Cauchy-Hadamard

Existe un radio de convergencia $r \in [0, +\infty]$:

Si $|x| < r \Longrightarrow \sum a_n x^n$ converge absolutamente. Si $|x| > r \Longrightarrow \sum a_n x^n$ no converge. Si x=r/x=-r puede converger o no.

Radio de convergencia de una serie de potencias

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$



1. Determinamos el radio de convergencia.
2. Decidimos si $\sum a_n x^n$ es convergente en x=r y x=-r estudiando $\sum a_n r^n$ y $\sum a_n (-r)^n$.
3. Determinamos el dominio de convergencia de la serie, que podrá ser: $(-r, r)$; $(-r, r]$; $[-r, r)$; $[-r, r]$.
4. Si la serie no está centrada en el origen $\sum a_n (x-c)^n$, la serie converge en $(c-r, c+r)$, y debemos estudiar los bordes.

Serie derivada y serie primitiva de una serie de potencias

Derivada: $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$

Primitiva: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots$

Serie, derivada y primitiva tienen el mismo radio de convergencia.

Continuidad, derivada e integral de una serie de potencias

Primer Teorema de Abel

Si $\sum a_n x^n$x es una serie de potencias con radio de convergencia r>0 , la convergencia de dicha serie es uniforme en cualquier intervalo compacto [a,b] contenido en el intervalo de convergencia de dicha serie.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias de radio de convergencia r, y sea: $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

i. La función suma es continua en todo el intervalo de convergencia.
ii. La función es derivable en (-r,r) y es: $s'(x) = D[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n] = \sum_{n=0}^{\infty} D[a_n x^n] = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
iii. La función es integrable en el intervalo [a,b] contenido en su intervalo de convergencia y es:

$$\int_a^b s(x)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

La suma de una serie de potencias es una función de clase C^∞ en el interior de su intervalo de convergencia

$$s^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

Desarrollo de una función en serie de potencias

Unicidad en el desarrollo en serie de potencias

f es de clase C^∞ en (-r,r) y para cada n=0,1,2,… es: $f^{n)}(0) = n!\, a_n$ Para cada $x \in (-r, r)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} x^n$

Condición suficiente para que exista desarrollo en serie

f admite desarrollo en serie de potencias de x en (-r,r) si y sólo si el resto n-ésimo de la fórmula de Taylor de f centrada en el origen tiene límite cero si $n \to \infty$, para todo $x \in (-\mathrm{r}, \mathrm{r})$.

Demostración serie de potencias

Sabemos que,

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \ \forall |x| < 1$$

Cualquier serie de potencias es derivable en su intervalo de convergencia y sus derivadas sucesivas pueden obtenerse derivando término a término en ella, así, para $|x| < 1$.

$$n = 1\colon \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = 1!\,(1-x)^{-2}$$

$$n = 2\colon \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2}(1-x)^{-1} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-2} = 2!\,(1-x)^{-3}$$

Por inducción:

$$n = k\colon \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} = \frac{d^k}{dx^k}(1-x)^{-1} = \cdots = k!\,(1-x)^{-(k+1)}$$

Desarrollo en serie exponencial (complejo)

$$S + iT = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\ n\alpha}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\cos n\alpha + i \cdot sen\ n\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos\alpha + i \cdot sen\ \alpha)^n}{n!} = e^{\cos\alpha + i \cdot sen\ \alpha}$$

$$= e^{\cos\alpha} \cdot [\cos(sen\alpha) + i \cdot sen\ (sen\alpha)] \xrightarrow{igualando\ partes\ reales} S = e^{\cos\alpha} \cdot [\cos(sen\alpha)]$$

TRUCOS

- Intentar lograr series de potencias. Podemos dividir un polinomio en varios conjuntos de productos de factores con los que lograr las series.