Áreas de regiones planas limitadas por curvas

Área encerrada entre una curva $y = f(x)$ y el eje de abscisas

$$\acute{a}rea(S) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{dx}$$

Área encerrada entre dos curvas

$$\acute{a}rea(S) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{dx}$$

Área limitada por una curva en polares

$$\acute{a}rea(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi(\theta)^2\mathrm{dx}$$

Área limitada por una curva cerrada en paramétricas

$$\acute{a}rea(D) = \int_\alpha^\beta \mathrm{x(t)} \cdot \mathrm{y'(t)dx} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\mathrm{x(t)} \cdot \mathrm{y'(t)} - \mathrm{y(t)} \cdot \mathrm{x'(t)}]\mathrm{dx}$$

Cálculo de volúmenes

V***olúmenes por secciones***

Sea S(t) la sección producida por un plano genérico de planos paralelos.

$$vol(C) = \int_a^b \mathrm{S(t)dt}$$

Volúmenes de revolución

Sea f una función real continua en [a, b], entonces el volumen de revolución engendrado al girar en torno al eje X, el recinto limitado por las rectas *x*=*a*, *x*=*b*, el eje X y la gráfica de f(x) viene dado por:

$V = \pi \int_a^b [\mathrm{f(x)}]^2\mathrm{dx}$

Volúmenes de curvas en paramétricas

$$\mathrm{vol}(C) = \pi \int_\alpha^\beta |\mathrm{x(t)}| \cdot y'(\mathrm{t})^2\mathrm{dx}$$

Volumen entre dos curvas continuas

$$vol(C) = \pi \int_a^b |f(x)^2 - g(x)^2|\mathrm{dx}$$

Cuerpo de revolución de eje OY (Fórmula de los tubos)

$$vol(C) = 2\pi \int_a^b |x||f(x)|\mathrm{dx}$$

$$vol(C) = 2\pi \int_a^b |x||f(x) - g(x)|\mathrm{dx}$$

<u>Alrededor de una recta $x = x_0$</u>: $vol(C) = 2\pi \int_a^b |x - x_0||f(x) - g(x)|\mathrm{dx}$

Cuerpo de revolución de eje polar

$$vol(C) = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta |\varphi(\theta)|^3\mathrm{sen}\theta\mathrm{d}\theta$$

<u>Teorema de Guldin-Pappus</u>

Para calcular el volumen engendrado por una superficie plana con centro de gravedad G, de densidad superficial constante, alrededor de un eje e de su plano que no corta a su interior:

$$V = 2\pi \cdot dist(G,e) \cdot \acute{a}rea(S)$$

Área lateral de una superficie de revolución

Sea f una función real continua en [a,b], tal que su derivada f ' también es continua en [a,b]; entonces el área lateral de revolución engendrada por f(x) al girar en torno al eje X, entre las rectas *x*=*a* y *x*=*b*, es:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [\mathrm{f'(x)}]^2}\mathrm{dx}$$

En coordenadas paramétricas, una curva viene definida por la expresión:

$$\left.\begin{matrix} x = x(t(\\ y = y(t) \end{matrix}\right\} t \in [a,b]$$

En este caso, la longitud de la curva viene dada por:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(\mathrm{t})|\sqrt{[\mathrm{x'(t)}]^2 + [\mathrm{y'(t)}]^2}\mathrm{dt}$$

Para curvas polares: $S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\varphi(\theta)|sen\theta\sqrt{\varphi(\theta)^2 + \varphi'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

Teorema de Guldin

El área de la superficie de revolución S engendrada al girar una curva plana (de densidad lineal constante) alrededor de un eje que está en su mismo plano y que no la atraviesa, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad.

$$\text{área}(S) = 2\pi d \cdot long(C)$$

Longitud de una curva

Sea f una función real continua en [a,b], tal que su derivada f ' también es continua en [a,b]; entonces la longitud de la gráfica de f entre *x*=*a* y *x*=*b* es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

En coordenadas paramétricas, una curva viene definida por la expresión:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t() \\ y = y(t) \end{array}\right\} t \in [a, b]$$

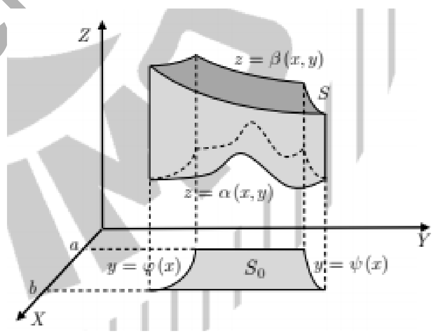
En este caso, la longitud de la curva viene dada por:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

Para curvas polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi(\theta)^2 + \varphi'(\theta)^2}\,d\theta$

Cálculo de volúmenes con integrales triples

$$\text{vol}(S) = \iiint_S dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz \right) dy \right) dx$$



Áreas

- Área elipse: πab
- Área casquete esférico: $2\pi rh$
- Área lateral cono: πrg
- Volumen esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$
- Volumen casquete esférico: $\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$
- Área de un segmento parabólico: $\frac{2}{3} \cdot OP \cdot HK$
- Superficie lateral de la esfera: $4\pi r^2$