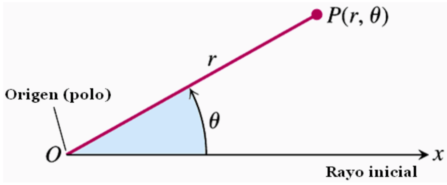
Curvas en polares

Una curva $\mathcal{C}$ de ecuación polar $\rho = \varphi(I)$ de cualquier función continua $\varphi: I \to \mathbb{R}$.

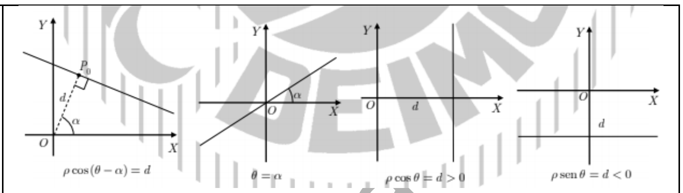
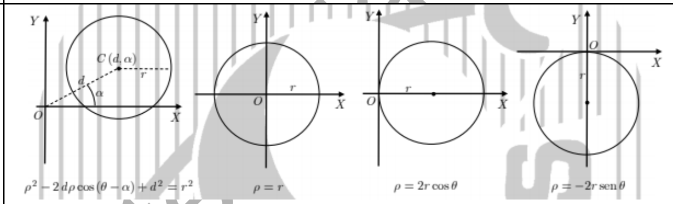
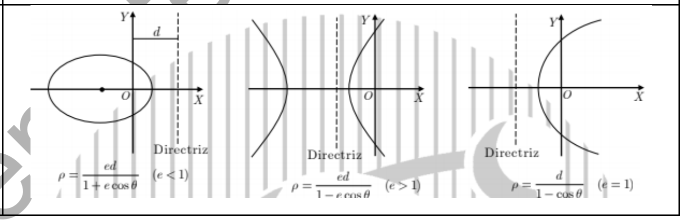
Coordenadas polares: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$, son el radio vector y el ángulo polar. A veces: $(-\pi, \pi] \to [0, 2\pi)$.

Para extender ρ a todo $\mathbb{R}$, clases de equivalencia de los pares del mismo punto del plano: $k \in \mathbb{Z}$



$\rho' = \rho = 0 \quad \rho' = \rho \neq 0$ y $\theta' = \theta + 2k\pi \quad \rho' = -\rho \neq 0$ y $\theta' = \theta + (2k-1)\pi$

Adoptando una referencia rectangular del plano con origen el polo, **el punto P**: $\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sen\theta \end{cases} \to \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ecuaciones polares de rectas $(d, \alpha), d > 0$: $$d = \rho\cos(\theta - \alpha)$$	
Ecuaciones polares de circunferencias $(d, \alpha), d > 0, r > 0$: $$\rho^2 - 2d\rho\cos(\theta - \alpha) + d^2 = r^2$$	
Ecuaciones polares de cónicas de excentricidad e, foco situado en O, si eje focal coincide con directriz: $$\rho = \frac{ed}{1 \pm ecos\theta}$$	

Propiedades de una curva

Periodicidad	$\exists p > 0 \mid \varphi(\theta + p) = \gamma(\theta), [\alpha, \alpha + p]$			
	Si $p = 2k\pi$ Estudio $[0, p]$ ó $\left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$	Si $p = (2k+1)\pi$ Giro centro el polo y amplitud π.	Si $p = \frac{2m\pi}{n}$ n-1 giros del arco anterior con centro el polo y amplitud p.	Si $p = 2a\pi \mid a \in \mathbb{I}$ Infinitos giros de centro el polo y amplitud p.
Simetría	Respecto eje polar: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ y $(\rho, -\theta) \in \mathcal{C} \to \varphi(2k\pi - \theta) = \varphi(\theta)$ ó $\varphi\big((2k-1)\pi - \theta\big) = -\varphi(\theta)$			
	Respecto eje $\frac{\pi}{2}$: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ y $(\rho, \pi - \theta) \in \mathcal{C} \to \varphi(2k\pi - \theta) = -\varphi(\theta)$ ó $\varphi\big((2k-1)\pi - \theta\big) = \varphi(\theta)$			
	Respecto polo: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ y $(-\rho, \theta) \in \mathcal{C} \to \varphi(2k\pi + \theta) = -\varphi(\theta)$ ó $\varphi\big((2k-1)\pi + \theta\big) = \varphi(\theta)$			
	Respecto recta $\theta = \alpha$: $(\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ y $(\rho, 2\alpha - \theta) \in \mathcal{C} \to \varphi(2\alpha - \theta) = \varphi(\theta)$			
Ramas infinitas	$\lim_{\theta \to \theta_0} \varphi(\theta) = \pm\infty$	Cuando tiene ramas infinitas, estudiamos las posibles asíntotas. $d = \lim_{\theta \to \theta_0} \varphi(\theta)\, sen(\theta - \theta_0)$		
Asíntotas	***Asíntota*** $\boldsymbol{\theta = \theta_0, si\ d = 0}$ Estudiamos el signo de $\varphi(\theta)$ cuando $\theta \to \theta_0$ para saber la posición.	***Asíntota recta*** $\boldsymbol{\rho}$***, si*** $\boldsymbol{d \neq 0}$ $\rho = \frac{d}{sen(\theta \to \theta_0)}$ Estudiamos $\varphi(\theta)sen(\theta - \theta_0) - d$ para decidir la posición.	***Rama parabólica en la dirección de*** $\boldsymbol{\theta_0}$ ***si*** $\boldsymbol{d = \pm\infty}$	

Círculos y puntos asintóticos. Ramas en espiral.

Circunferencia asintótica centro polo y $|r| > 0$: envuelve o es envuelta.

$$\lim_{\theta\to\pm\infty} \varphi(\theta) = r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

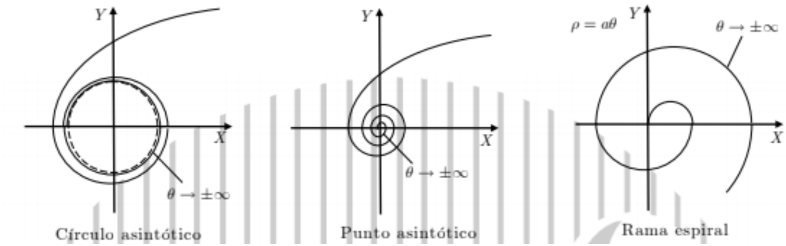
$$\varphi(\theta)^2 - r^2 < 0 \to interior$$

Punto asintótico

$$\lim_{\theta\to\pm\infty} \varphi(\theta) = 0$$

Rama espiral

$$\lim_{\theta\to\pm\infty} \varphi(\theta) = \pm\infty$$



Tangentes horizontales y verticales

Si la curva admite derivadas de todos los órdenes en el intervalo I, entonces ($\theta \to t$):

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\rho cost, \rho sent) = \varphi(t)(cost, sent)$$

Vector de las derivadas en un punto: $\gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = \varphi'(t)(cost, sent) + \varphi(t)(-sent, cost)$

Puntos regulares y singulares (Curvas en paramétricas)

Punto regular (ordinario) $\boldsymbol{P = \gamma(t_0)}$

$$\gamma'(t_0) \neq 0 \Longrightarrow x'(t_0) \neq 0 \; y \; y'(t_0) \neq 0$$

Vector tangente: $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$

Recta tangente: vector + punto P

Para decidir la posición de la curva respecto de la tangente: Primer vector $\gamma^{n)}(t_0), n \geq 2$ cuya dirección sea distinta a los anteriores.

Si n par: en el entorno de P hacia el que apunta el vector.

Si n impar: P punto de inflexión; la curva atraviesa.

Punto singular $\boldsymbol{P = \gamma(t_0)}$

$$\gamma'(t_0) = 0 \Longrightarrow x'(t_0) = y'(t_0) = 0$$

Vector tang.: $\gamma^{p)}(t_0) = (x^{p)}(t_0), y^{p)}(t_0))$

$$\gamma'(t_0) = \gamma''(t_0) = \cdots = \gamma^{p-1)}(t_0) = 0$$

$$\gamma^{p)}(t_0) \neq 0$$

Para decidir la posición de la curva respecto de la tangente: Primer vector $\gamma^{q)}(t_0) \neq 0$ cuya dirección sea distinta a los anteriores entre p y q.

- Si p y q impares, P punto de inflexión.
- Si p par y q impar, P punto de retroceso de 1ª especie.
- Si p impar y q par, P punto ordinario de la curva.
- Si p y q pares, P punto de retroceso de 2ª especie.

Tangentes horizontales y verticales

Tangente horizon.: $x'(t_0) \neq 0 \; y \; y'(t_0) = 0$

Tangente vertical: $x'(t_0) = 0 \; y \; y'(t_0) \neq 0$

A los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a alguno de los dos ejes coordenados se les suele llamar puntos críticos de la curva.

Cuadro de variaciones

t	De $-\infty \; a + \infty$ incluyendo los puntos críticos y en los que no existe.
$(x'(t), y'(t))$	(signo, signo) en intervalos.
$(x(t), y(t))$	Valores.

Puntos complem.

Corte con ejes

Eje polar: $\theta = k\pi$

Eje perpendicular: $= \frac{\pi}{2} + k\pi$

Múltiples

$$\varphi(\theta + 2k\pi) = \varphi(\theta)$$

$$\varphi(\theta + (2k-1)\pi) = -\varphi(\theta)$$

Gráfica de una curva

Además de todos los puntos anteriores, podemos calcular otros puntos de la curva tales como sus intersecciones con las asíntotas que pudiera tener la curva.