Progresiones aritméticas

Término general

$$a_n = a_{n-1} + d$$
$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Suma finita de términos

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Interpolación

$$\frac{b-a}{m+1}$$

Binomio de Newton

$$(x+a)^m = \binom{m}{0} x^m.a^0 + \binom{m}{1} x^{m-1}.a^1 + \ldots + \binom{m}{n} x^n.a^{m-n} + \ldots + \binom{m}{m} x^0.a^m \to \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k.a^{m-k}$$

$$(x-a)^m = \binom{m}{0} x^m.a^0 - \binom{m}{1} x^{m-1}.a^1 + \ldots + (-1)^n \binom{m}{n} x^n.a^{m-n} + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} x^0.a^m \to \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^k.a^{m-k}$$

Coeficiente del término k-ésimo Binomio de Newton:

$$c_k = \binom{m}{k-1}$$

Número combinatorio

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!.(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Progresiones aritméticas de orden superior

Diferencias finitas

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta^2 x_1 = \Delta x_2 - \Delta x_1 \Rightarrow \Delta^n x_1 = \Delta^{n-1} x_2 - \Delta^{n-1} x_1$$

Fórmulas de Newton

Emplearemos las Fórmulas de Newton para obtener el término general en sucesiones en las que nos den términos consecutivos.

$$x_n = \binom{n-1}{0} x_1 + \binom{n-1}{1} \Delta x_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 x_1 + \quad + \binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} x_1$$

$$S_n = \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} \Delta x_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 x_1 + \quad + \binom{n}{n} \Delta^{n-1} x_1$$

Progresiones geométricas

Término general

$$a_n = a_{n-1} r$$
$$a_n = a_k r^{n-k}$$

Suma de términos

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

$$|r| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

Interpolación

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Producto

$$P_n = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$$

Progresiones aritmético-geométricas

Término general

$$a_n = (a+bn)r^n$$

Suma de términos

$$S_n - r S_n = (1-r) S_n$$

Método general

$$A_n - x A_n = (1-x) A_n$$

Recurrencias lineales de primer orden con coeficientes constantes

Término general: $x_n = a x_{n-1} + b$

1. *Escribimos ecuación recurrente para los valores n, n-1, …, 2.*
2. *Multiplicamos $a^{n-n \text{ de orden}}$ partir de n-1 por a, a^2,…, a^{n-2}. (Cuando n=n-1; $a^{n-(n-1)}$=a. Cuando n=3; a^{n-3}).*
3. *Sumamos miembro a miembro y estudiando casos si procede.*

Sucesiones homográficas

Término general

$$x_n = \frac{a x_n + b}{c x_{n-1} + d}$$

Ecuación asociada

$$x = \frac{ax+b}{cx+d} \to cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

Caso 1: *dos soluciones distintas*

$$\frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha} = r^{n-1} \frac{x_1 - \beta}{x_1 - \alpha}$$

Caso 2: *una solución doble*

$$\frac{1}{x_n - \alpha} = \frac{1}{x_{n-1} - \alpha} + k$$

Recurrencias lineales con coeficientes constantes de orden k

Término general: $x_n = a_1 x_{n\text{-}1} + a_2 x_{n\text{-}2} + \cdots + a_k x_{n\text{-}k}$

Ecuación característica: $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_{k-1} x - a_k = 0$

Casos según la naturaleza de las raíces de la ecuación característica

$\Rightarrow$ Si $r \in R$, con multiplicidad p:

$(r^n), (nr^n), \quad , (n^{p-1} r^n)$

$x_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n + \quad + \lambda_p n^{p-1} r^n$

$\Rightarrow$ Si $\rho(\cos\theta \pm i sen\theta)$ es raíz con multiplidad p:

$(\rho^n \cos n\theta), (n\,\rho^n \cos n\theta), \quad , (n^{p-1}\,\rho^n \cos n\theta)$

$(\rho^n sen n\theta), (n\,\rho^n sen n\theta), \quad (n^{p-1}\,\rho^n sen n\theta)$

$x_n = \lambda_1 \rho^n \cos n\theta + \lambda_2\, n\,\rho^n \cos n\theta + \quad + \lambda_p\, n^{p-1}\,\rho^n \cos n\theta + \mu_1 \rho^n sen n\theta + \mu_2\, n\,\rho^n sen n\theta + \quad + \mu_p\, n^{p-1}\,\rho^n sen n\theta$

Número complejo: forma polar y trigonométrica

Sea $z = x + iy$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\Rightarrow$ Forma trigonométrica: $z = r(\cos\alpha \pm i sen\alpha)$; Forma polar: $z = (r, \alpha)$

Después, sustituiríamos con los valores que conocemos de x_n.

Ecuaciones en diferencias lineales y completas de orden k

Término general: $a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \quad + a_k x_{n-k} = r_n$ ***Ecuación característica:*** $a_{nGC} = a_{nGH} + a_{nsp}$

$\boxed{a_{nGH}}$ $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \quad + a_k = 0$, resolvemos como "Recurrencias lineales con coeficientes constantes de orden k".

$\boxed{a_{nsp}}$ ***Solución particular de la ecuación en diferencias lineal y completa (Método de los coeficientes indeterminados):***

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \quad + a_k x_{n-k} = p(n) s^n, \text{ donde: } a_{nsp} = n^j q(n) s^n$$

Se pueden dar dos casos según r_n:

$\Rightarrow$ Si s no es raíz de la a_{nGH} ($j = 0$):

$x_n = q(n) s^n$, donde $q(n)$ puede ser:

a) Si $\operatorname{gr} q(n) = 0 \Rightarrow q(n) = k$ y $a_{nsp} = k s^n$

b) Si $\operatorname{gr} q(n) \geq 1 \Rightarrow q(n) = a + bn$ y $a_{nsp} = (a + bn) s^n$

$\Rightarrow$ Si s es raíz de la a_{nGH} ($j =$ multiplicidad de la raíz):

$x_n = n^j q(n) s^n$, donde $q(n)$ puede ser:

a) Si $\operatorname{gr} q(n) = 0 \Rightarrow q(n) = k$ y $a_{nsp} = n^j k s^n$

b) Si $\operatorname{gr} q(n) \geq 1 \Rightarrow q(n) = a + bn$ y $a_{nsp} = n^j (a + bn) s^n$

Resolvemos a_{nsp} igualando a r_n del término general sustituyendo cada x_n con la ecuación de la particular atendiendo al valor de n.

Resolvemos a_{nGH} una vez tenemos los valores de a_{nsp} sustituyendo con los valores conocidos de x_n.

TRUCOS

- Numeradores y denominadores distinta progresión en ocasiones.
- Podemos convertir sumas descompuestas en fracciones simples en sumas telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+(i+1)} + \frac{1}{n+(i+1)} - \frac{1}{n+(i+2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+(i+1)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+(i+1)} - \frac{1}{n+(i+2)}\right)$$

- Podemos ir encadenando sucesiones cuando aplicamos los métodos generales hasta llegar a una de fácil resolución.
- Poner atención en el primer término de la serie.
- Podemos completar las recurrencias si nos faltan términos como 1^n.
- Cuando sacamos factor común en productos, siempre tenemos que tener en cuenta cuántos factores hay en el producto.
- Cuando sea posible, tratar de obtener series telescópicas.
- Si tenemos varias sucesiones, podemos recurrir a compararlas para simplificar.