Recurrencias lineales con coeficientes constantes de orden k

Término general: $x_n = a_1 x_{n\text{-}1} + a_2 x_{n\text{-}2} + \cdots + a_k x_{n\text{-}k}$

Ecuación característica: $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_{k-1} x - a_k = 0$

Casos según la naturaleza de las raíces de la ecuación característica

$\Rightarrow$ Si $r \in R$, con multiplicidad p:

$(r^n), (nr^n), \quad , (n^{p-1} r^n)$

$x_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n + \quad + \lambda_p n^{p-1} r^n$

$\Rightarrow$ Si $\rho(\cos\theta \pm i sen\theta)$ es raíz con multiplidad p:

$(\rho^n \cos n\theta), (n \rho^n \cos n\theta), \quad , (n^{p-1} \rho^n \cos n\theta)$

$(\rho^n sen n\theta), (n \rho^n sen n\theta), \quad (n^{p-1} \rho^n sen n\theta)$

$x_n = \lambda_1 \rho^n \cos n\theta + \lambda_2 n \rho^n \cos n\theta + \quad + \lambda_p n^{p-1} \rho^n \cos n\theta + \mu_1 \rho^n sen n\theta + \mu_2 n \rho^n sen n\theta + \quad + \mu_p n^{p-1} \rho^n sen n\theta$

Número complejo: forma polar y trigonométrica

Sea $z = x + iy$: $\begin{array}{l} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Forma trigonométrica: } z = r(\cos\alpha \pm i sen\alpha) \\ \text{Forma polar: } z = (r, \alpha) \end{array}$

Después, sustituiríamos con los valores que conocemos de x_n.

Ecuaciones en diferencias lineales y completas de orden k

Término general: $a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \quad + a_k x_{n-k} = r_n$ ***Ecuación característica:*** $a_{nGC} = a_{nGH} + a_{nsp}$

$\boxed{a_{nGH}}$ $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \quad + a_k = 0$, resolvemos como "Recurrencias lineales con coeficientes constantes de orden k".

$\boxed{a_{nsp}}$ ***Solución particular de la ecuación en diferencias lineal y completa (Método de los coeficientes indeterminados):***

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \quad + a_k x_{n-k} = p(n) s^n, \text{ donde: } a_{nsp} = n^j q(n) s^n$$

Se pueden dar dos casos según r_n:

$\Rightarrow$ Si s no es raíz de la a_{nGH} ($j = 0$):

$x_n = q(n) s^n$, donde $q(n)$ puede ser:

a) Si grq(n) = 0 $\Rightarrow q(n) = k$ y $a_{nsp} = k s^n$

b) Si grq(n) ≥ 1 $\Rightarrow q(n) = a + bn$ y $a_{nsp} = (a + bn) s^n$

$\Rightarrow$ Si s es raíz de la a_{nGH} ($j =$ multiplicidad de la raíz):

$x_n = n^j q(n) s^n$, donde $q(n)$ puede ser:

a) Si grq(n) = 0 $\Rightarrow q(n) = k$ y $a_{nsp} = n^j k s^n$

b) Si grq(n) ≥ 1 $\Rightarrow q(n) = a + bn$ y $a_{nsp} = n^j (a + bn) s^n$

Resolvemos a_{nsp} igualando a r_n del término general sustituyendo cada x_n con la ecuación de la particular atendiendo al valor de n.

Resolvemos a_{nGH} una vez tenemos los valores de a_{nsp} sustituyendo con los valores conocidos de x_n.

TRUCOS

- Numeradores y denominadores distinta progresión en ocasiones.
- Podemos convertir sumas descompuestas en fracciones simples en sumas telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+(i+1)} + \frac{1}{n+(i+1)} - \frac{1}{n+(i+2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+(i+1)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+(i+1)} - \frac{1}{n+(i+2)}\right)$$

- Podemos ir encadenando sucesiones cuando aplicamos los métodos generales hasta llegar a una de fácil resolución.
- Poner atención en el primer término de la serie.
- Podemos completar las recurrencias si nos faltan términos como 1^n.
- Cuando sacamos factor común en productos, siempre tenemos que tener en cuenta cuántos factores hay en el producto.
- Cuando sea posible, tratar de obtener series telescópicas.
- Si tenemos varias sucesiones, podemos recurrir a compararlas para simplificar.