Autovalores y autovectores

Paso 1: Hallar los autovalores de la matriz nxn.

1.1 Los autovalores de A son las soluciones de la ecuación:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

La multiplicidad de cada autovalor, nos indicará también la dimensión y, así, el número de autovectores.

Paso 2: Obtener los subespacios propios asociados a dichos autovalores.

2.1 Dimensión de los subespacios propios V_{λ_i} (multiplicidad geométrica):

$$dimV_{\lambda_i}=n-rang(A-\lambda I)$$

2.2 Número de ecuaciones: $rang(A-\lambda I)$

2.3 Número de vectores: $dimV_{\lambda_i}$

Paso 3: Obtener los autovectores asociados a cada autovalor.

Damos valores a cada parámetro y obtenemos tantos autovectores como parámetros tenemos.

$$\begin{array}{ccccc} & P\cdot v & & A\cdot P\cdot v & \\ & \mathbb{R}^3_{can} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3_{can} & \\ P=M(B\longrightarrow can) & \uparrow & & \downarrow & P^{-1}=M(can\longrightarrow B) \\ & \mathbb{R}^3_B & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}^3_B & \\ & v & & P^{-1}APv & \end{array}$$

Donde D es una matriz diagonal tal que, M(f,can,can)=A.

$$\left.\begin{array}{l} f(v_1)=\lambda_1 v_1 \\ f(v_2)=\lambda_2 v_2 \\ f(v_3)=\lambda_3 v_3 \end{array}\right\} \longrightarrow D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

<u>Y P es la matriz formada por los autovectores colocados en columna</u>.

Potencias n-ésimas de matrices cuadradas

$$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}$$

Polinomio característico y autovalores de una matriz de orden n

$p_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+d_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$, donde $d_i=(-1)^n\cdot\{suma\ de\ los\ menores\ de\ orden\ n-i\ de\ A\}$.

Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Teorema de Cayley-Hamilton

Si $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+d_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$,

entonces $p(A)=(-1)^nA^n+d_{n-1}A^{n-1}+\cdots+d_1A+d_0I=0$.

Aplicación al cálculo de matrices inversas

$$A^{-1}=-\frac{(-1)^n}{d_0}A^{n-1}-\frac{d_{n-1}}{d_0}A^{n-2}-\cdots-\frac{d_1}{d_0}I$$

$d_0\neq 0$ (Matrices invertibles).

Diagonalización ortogonal

Para obtener bases ortonormales acudimos al:

Proceso de ortogonalización de Gran-Schimt

Paso 1: Construir base ortogonal: $v_1=u_1, v_2=u_2+av_1, v_3=u_3+av_1+bv_2$,

y a, b y c se eligen tal que: $v_1v_2=v_2v_3=v_1v_3=0$

Paso 2: Obtenemos base ortonormal:

$$w_i=\frac{v_i}{|v_i|}$$

TRUCOS

- Poner cuidado en la distinción de los casos de diagonalización.
- Para $x,y,z\in\mathbb{R}^+\ es\ log_xylog_yx=1\ y\ log_xylog_yzlog_zx=1$.
- Toda matriz simétrica es diagonalizable.
- En los determinantes buscar tener siempre en todas las filas o columnas el mismo factor común.
- Cuidado con realizar sumas y restas con la columna siguiente o anterior, siempre hay una que debe quedar constante.
- Podemos intentar encontrar sumas de progresiones entre las filas.
- CUIDADO en los sistemas con las incógnitas: ¡A VECES TIENEN DISTINTO ORDEN EN CADA FILA!